6ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Valores Próprios e Vectores Próprios

Álgebra Linear - 2º Semestre - 2004/2005

LEE, LEGI, LEIC-TP, LERCI

Problema 1. Encontre subespaços invariantes por T , quando T é a seguinte transformação linear:

a) A reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, relativamente ao eixo dos xx;

b) A reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, relativamente ao plano-xy;

c) A projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx;

d) A projecção ortogonal de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano-xy;

e) A rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, em torno da origem, no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo), por um ângulo de $\pi/2$;

f) A rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em torno da origem, no sentido positivo, por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao eixo dos zz.

Problema 2. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que A e A^T têm os mesmos valores próprios.

Problema 3. Suponha que v é um vector próprio de uma transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associado a um valor próprio λ. Mostre que:

a) $\lambda \neq 0$;

b) v também é um vector próprio de T^{-1} (e neste caso determine o valor próprio de T^{-1} que lhe está associado).

Problema 4. Suponha que $T : V \to V$ tem um vector próprio v associado a um valor próprio λ. Mostre que v é um vector próprio de T^2 associado ao valor próprio λ^2.

Problema 5. Suponha que $T : V \to V$ é uma transformação linear, tal que T^2 tem um valor próprio não negativo λ^2. Mostre que λ ou $-\lambda$ é um valor próprio de T.

Problema 6. Considere a matriz $A(\theta) = \begin{bmatrix} 1+\theta & 2 \\ 2 & 1+\theta \end{bmatrix}$.

a) Determine, como função de θ, os valores próprios e os vectores próprios de $A(\theta)$.

b) Relacione, agora, os valores e os vectores próprios de uma matriz arbitrária B $(n \times n)$, com os da matriz $B(\theta) = B + \theta I_n$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

Problema 7. Considere as seguintes matrizes, que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^2$ relativamente à base canónica:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

Problema 8. Considere as seguintes matrizes, que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^3$ relativamente à base canónica:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

Problema 9. Considere as seguintes matrizes, que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^4$ relativamente à base canónica:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

Problema 10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Calcule A^{25}.

b) Encontre bases para os espaços próprios associados a A^{25}.

Problema 11. Seja V o espaço linear real de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e seja W o seguinte subespaço linear de V:

$$W = \ \mathrm{L}\ (\ \{\ \mathrm{sen}\ x,\ \ \cos x\ \}\ ).$$

Seja $D : W \to W$ a função derivada (que, como sabemos, é uma transformação linear).

a) Escolha uma base para W, e determine a representação matricial de D^2 em relação a essa base.

b) Encontre os valores próprios de D^2, e também os espaços próprios correspondentes.

Problema 12. Seja V o espaço linear real das matrizes 2×2 com entradas reais, e seja $T : V \to V$ a transformação linear definida por

$$T(A) = A + A^T.$$

a) Escolha uma base para V, e determine a representação matricial de T em relação a essa base.

b) Calcule os valores próprios e os vectores próprios de T.

c) Diga se T pode ser representada por uma matriz diagonal, em relação a uma base apropriada de V. Em caso afirmativo, indique essa base, e também a correspondente representação diagonal de T.

Problema 13. As matrizes seguintes representam transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$, ou de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$, em relação às respectivas bases canónicas.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{f)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine quais destas transformações são diagonalizáveis. Em caso afirmativo, represente o respectivo diagrama comutativo, relacionando a matriz dada com a matriz diagonal, através das matrizes mudança de base.

Problema 14. Para cada uma das formas quadráticas dadas, determine uma matriz simétrica, A, associada à forma quadrática, e determine também uma forma quadrática diagonal correspondente:

a) $Q(x, y) = xy$ em $\mathbb{R}^2$.

b) $Q(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ em $\mathbb{R}^2$.

c) $Q(x, y, z) = x^2 + xy + xz + yz$ em $\mathbb{R}^3$.

Problema 15. Considere a forma quadrática $Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$ em $\mathbb{R}^2$.

a) Mostre que se trata de uma forma quadrática definida positiva.

b) Exiba a mudança de variáveis que permite eliminar o termo $-4xy$.

Problema 16. Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais:

a) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} f_1' & = & f_1 & + & 4f_2 \\ f_2' & = & 2f_1 & + & 3f_2 \end{array} \right.$

com condições iniciais $f_1(0) = 0,\ f_2(0) = 0.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} f_1' & = & 4f_1 & + & & + & f_3 \\ f_2' & = & -2f_1 & + & f_2 & & \\ f_3' & = & -2f_1 & + & & + & f_3 \end{array} \right.$

com condições iniciais $f_1(0) = -1,\ f_2(0) = 1,\ f_3(0) = 0.$