3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Espaços Lineares

Álgebra Linear - 2º Semestre - 2004/2005

LEE, LEGI, LEIC-TP, LERCI

Problema 1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos, com as operações usuais de soma vectorial e multiplicação por escalares reais, são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$:

a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0)$, com a real.

b) O conjunto de vectores da forma $(a, 1, 1)$, com a real.

c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c), com $b = a + c$ e a, b, c reais.

d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c), com a, b, c inteiros.

e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c), com $b = a + c + 1$ e a, b, c reais.

Problema 2. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são espaços lineares reais (considere as operações usuais de adição e multiplicação por um número real).

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$.

d) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 2\}$.

e) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores.

f) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores não singulares.

g) Conjunto das matrizes singulares $n \times n$.

h) Conjunto das matrizes $n \times n$ que comutam com uma dada matriz A.

i) { polinómios reais $p(x)$ que se anulam em $x = 0$ }.

j) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$ (funções pares).

k) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(x + 2\pi)\}$ (funções periódicas de período 2π).

l) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ tem a segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0\}$, onde a e b são dois números reais dados.

m) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ tem a segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = \cos x\}$, onde a e b são dois números reais dados.

Problema 3. Mostre que se U e V são subespaços lineares de um espaço W, então $U + V$ e $U \cap V$ também são subespaços lineares de W. E $U \cup V$?

Problema 4. Mostre que se V é um espaço linear, e se S é um subconjunto não vazio de V, então $L(S)$, a expansão linear de S, é um subespaço linear de V.

Problema 5. Exprima cada um dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

a) $(-9, -7, -15)$ b) $(6, 11, 6)$ c) $(0, 0, 0)$

Problema 6. Exprima a matriz $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ como combinação linear de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Problema 7. Considere $\mathbf{v_1} = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v_2} = (3, -1, 5, 2)$ e $\mathbf{v_3} = (-1, 0, 2, 1)$, vectores em $\mathbb{R}^4$. Quais dos vectores seguintes pertencem à expansão linear $\mathrm{L}(\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\})$?

a) $(2, 3, -7, 3)$ b) $(0, 0, 0, 0)$ c) $(1, 1, 1, 1)$ d) $(-4, 6, -13, 4)$

Problema 8. Determine as coordenadas do vector $\mathbf{v}$ nas seguintes bases B:

a) $\mathbf{v} = (2, 1)$; $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1, 0)$, $\mathbf{v_2} = (0, 1)$.

b) $\mathbf{v} = (2, 1)$; $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1, 0)$, $\mathbf{v_2} = (2, 2)$.

c) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v_3} = (1, 1, 1)$.

Problema 9. Seja W o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ constituído pela expansão linear dos vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 0, 0)$ e $\mathbf{w} = (0, -2, 0, 0)$.

a) Mostre que $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ não é uma base de W.

b) Determine a dimensão e uma base de W.

Problema 10. Indique, justificando, qual a dimensão dos seguintes espaços lineares reais, e indique também uma base para cada um deles.

a) $\mathrm{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

b) O conjunto de vectores da forma (a, b, c), com $b = a + c$ e $c = 2a$, sendo a, b, c reais.

c) $\mathrm{V} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 2y + 5z - w = 0\}$.

d) $\mathrm{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$.

Problema 11. Indique a dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços lineares reais:

a) O conjunto das matrizes 2×3 com entradas reais.

b) O conjunto das matrizes 2×2, simétricas, e com entradas reais.

c) O conjunto das matrizes 3×3, anti-simétricas, e com entradas reais.

d) O conjunto das matrizes 3×3, triangulares superiores, e com entradas reais.

e) O conjunto das matrizes 2×2 com entradas reais, que comutam com $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

Problema 12. Seja V o espaço linear dos polinómios de variável real, de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

(a) Diga qual a dimensão de V e indique uma base ordenada para V. Indique as coordenadas do polinómio $(1-t)(1+t)$ nessa base.

(b) Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S = \{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se S é uma base para V.

(c) Diga qual a dimensão do espaço linear $L(S)$, e determine uma base para esse espaço.

Problema 13. Seja V o espaço linear dos polinómios de variável real, de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real. Encontre a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços de V.

a) A é o conjunto de todos os polinómios de V que se anulam em 0.

b) $B = \{p \in V : p(-x) = p(x)\}$ (conjunto dos polinómios pares).

c) $C = \{p \in V : p(-x) = -p(x)\}$ (conjunto dos polinómios ímpares).

d) $D = \{p \in V : p(0) = p(1)\}$.

Problema 14. Se $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos, indique a dimensão e uma base para $\mathbb{C}^3$

(a) como espaço linear complexo;

(b) como espaço linear real.

Problema 15. Determine o núcleo (espaço nulo) das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Problema 16. Determine a dimensão e uma base para o espaço solução de cada um dos sistemas seguintes:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ -2x-y+2z & = & 0 \\ -x+z & = & 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y+z+t & = & 0 \\ 5x-y+z-t & = & 0 \end{array}\right.$

Problema 17. Para cada uma das matrizes seguintes, encontre a dimensão e uma base para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz, para o espaço gerado pelas linhas da matriz, e para o espaço gerado pelas colunas da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Problema 18. Se B pertencer ao espaço gerado pelas colunas da matriz A, escreva B como combinação linear das colunas de A, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 19. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A (nulidade de A) e do núcleo de A^T (matriz transposta de A).

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2

Problema 20. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar se o correspondente sistema de equações lineares não-homogéneo $AX = B$ é possível. Em caso afirmativo, indique o número de variáveis livres que entram na solução geral do sistema.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car (A$\vdots$B)	3	3	1	2	3	0	2

Problema 21. Indique a dimensão do núcleo de cada uma das matrizes A do exercício anterior e determine o número de variáveis livres que entram na solução geral do correspondente sistema de equações lineares homogéneo $AX = O$.

Problema 22. Considere os seguintes pares de subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$, e encontre, em cada caso, a dimensão e uma base para $U+V$ e para $U\cap V$.

a) $U = L(\{(1,0,2,0)\})$ e
$V = \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y+2z-w=0 \wedge -y+3w=0 \wedge z=0\}$.

b) $U = L(\{(1,0,-1,0),(0,1,1,0)\})$ e
$V = \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : -x+y-2w=0 \wedge 2y-z=0\}$ e

c) $U = L(\{(0,0,1,0),(-2,0,0,-2)\})$
$V = \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y-z-w=0 \ \wedge \ x-w=0\}$

Verifique que $\dim U + \dim V = \dim(U\cap V) + \dim(U+V)$ nos três casos considerados.

Problema 23. Encontre a matriz mudança de base da base canónica de $\mathbb{R}^2$ para a base $B=\{(2,-2),(3,4)\}$, e represente o vector $w=(2,2)$ na base B.

Problema 24. Seja $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, onde $u_1=(2,1,0)$, $u_2=(-1,1,1)$, e $u_3=(1,1,1)$. Seja $v=u_1+2u_2-u_3$ um vector de $\mathbb{R}^3$ representado na base B. Represente v na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Problema 25. Seja P o espaço linear dos polinómios reais de variável real, de grau menor ou igual a 2. Encontre a matriz mudança de base, da base canónica de P para a base $B=\{1-t,t^2,1+t+t^2\}$ de P, e represente o vector $w=2-3t+t^2$ na base B.