

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Exame de Métodos Numéricos - 15/07/2005
Cursos de Engenharia Electrotécnica, Civil, Naval, Geológica e Mineira e de Materiais
Apresente todos os cálculos que efectuar

I

1. Considere a equação

$$e^{x/4} = \frac{2}{x}, \quad x > 0. \quad (1)$$

e os métodos iterativos

$$x_{n+1} = 2e^{-x_n/4}, \quad x_{n+1} = 4\ln(2/x_n)$$

- (a) Prove que a equação (1) admite uma solução única, z , no intervalo $[1.3, 1.5]$.
[1.0]
- (b) Prove que: um dos métodos acima converge para a raiz z , qualquer que seja x_0 escolhido em $[1.3, 1.5]$; o outro método diverge. [2.5]
- (c) Utilizando o método convergente, faça $x_0 = 1.3$ e calcule as 2 primeiras iteradas x_1, x_2 . Quantas iteradas teria de calcular para obter um erro inferior a 10^{-3} ?
[1.7]
- (d) Relativamente ao método da alínea anterior, diga, justificando, qual o valor do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^2} \quad [0.8]$$

2. Seja f uma função diferenciável que admite uma raiz dupla w , $f(w) = f'(w) = 0$. A função pode escrever-se na forma $f(x) = (x - w)^2 h(x)$, com $h(w) \neq 0$. Escreva a equação das iteradas do método de Newton para aproximar w e determine a ordem de convergência. Comente, à luz do que sabe sobre a convergência do método de Newton. [2.0]

II

1. Considere a família de matrizes

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon & \epsilon^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \epsilon^2 & \epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$.

- (a) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $A_\epsilon \mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ 1]^T$, qualquer que seja a iterada inicial, e calcule a primeira iterada partindo de $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 2 \ 1]^T$. [2.0]
- (b) Faça $\epsilon = \frac{1}{3}$. Baseando-se nas respectivas matrizes de iteração, C , diga qual dos dois métodos iterativos, Gauss-Seidel ou de Jacobi, daria em princípio os melhores resultados? [2.0]

III

1. Seja F a função $F(x) = \sin(x)$.
 - (a) Determine o polinómio interpolador de F nos pontos $0, \frac{\pi}{2}$ e π . [1.5]
 - (b) Calcule o valor aproximado do integral $\int_0^\pi F(x)dx$ usando a regra dos trapézios composta com três subintervalos. [1.0]
2. Para aproximar integrais $\int_0^\pi f(x)dx$ pretende-se obter uma regra de quadratura da forma $Q(f) = A_0 f(\frac{\pi}{4}) + A_1 f(\frac{3\pi}{4})$.
 - (a) Obtenha os pesos A_0, A_1 da regra referida, impondo que ela seja exacta para polinómios de grau ≤ 1 . [1.5]
 - (b) Diga o que entende por grau de precisão duma regra de quadratura. Determine o grau da regra obtida na alínea anterior. [1.0]
 - (c) Determine uma fórmula para o erro de integração da regra obtida. (*Sugestão: compare com a regra do ponto médio*). [1.5]
3. Considere a equação diferencial $y'(t) = t y(t)$, sujeita à condição inicial $y(1) = 1/2$. Calcule, pelo método de Euler, com passo 0.1, um valor aproximado de $y(1.2)$. [1.5]