

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Exame de Análise Numérica/Métodos Numéricos - 26/06/2002

Cursos de Engenharia Civil, Electrotécnica e Naval

Apresente todos os cálculos que efectuar

I

1. Considere a equação

$$x - e^{-x/2} = 0 \quad (1)$$

e a sucessão definida por

$$x_0 = 0.6, \quad x_{m+1} = \frac{3}{4} x_m - \frac{\log x_m}{2}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2)$$

- (a) Recorrendo ao teorema do ponto fixo, mostre que a sucessão (2) é convergente e que o seu limite, z , pertence ao intervalo $[0.6, 0.8]$. Prove ainda que z é também a única raiz da equação (1) nesse intervalo. **[2.0]**
- (b) Para obter uma aproximação de z , efectue iterações do método (2), até se verificar $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4}$. Obtenha ainda um majorante para o erro absoluto da iterada x_{k+1} . **[1.5]**
- (c) Prove que o método de Newton, aplicado à equação (1), converge para a raiz $z \in [0.6, 0.8]$, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 pertencente a esse intervalo. **[1.5]**
2. Seja g uma função iteradora continuamente diferenciável num intervalo $I = [a, b]$, com $0 < g'(x) < 1$ para $x \in I$, e tal que g tem um ponto fixo w em I . Mostre que $g(I) \subset I$. **[1.5]**

II

Considere a resolução, pelo método de Newton, do seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{aligned} x_1^3 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ e^{x_2} - x_3^2 &= 1 \\ -x_1^2 + x_2 + x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

onde $\alpha > 0$.

1. Tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [c \ 0 \ 0]^T$, onde c é um certo real, mostre que o sistema linear a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é da forma $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$, com

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -c^3 \\ 0 \\ c^2 + \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{[1.0]}$$

2. Diga para que valores de c está garantida a convergência do método iterativo de Jacobi aplicado ao sistema $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ [1.5]
3. Faça $c = 1$ em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$. Suponha que se utiliza uma aproximação $\tilde{\alpha}$ para α na última componente de $\mathbf{b}$, verificando $|\alpha - \tilde{\alpha}| < 0.001$. Sendo $\tilde{\mathbf{v}}$ a solução do novo sistema obtido e sabendo que $\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} = 18$, calcule um majorante do erro relativo dessa solução $\tilde{\mathbf{v}}$. [1.5]

III

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f , em que α é um real

x_i	0	1	2	3	4	7	9	10	13	16
$f(x_i)$	12	10	7	5	6	8	11	14	15	20

- (a) Calcule aproximações de $I = \int_1^{13} f(x) dx$ utilizando: i) a regra de Simpson simples ; ii) a regra de Simpson composta [1.5]
 - (b) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, obtenha o polinómio que interpola f nos pontos da tabela correspondentes aos nós 3, 4, 7. [1.5]
 - (c) Determine a função da forma $g(x) = ax^2 + bx$ que melhor se ajusta aos **3 primeiros** pontos da tabela acima, segundo o critério dos mínimos quadrados. [1.5]
2. Para aproximar o integral

$$I(f) = \int_0^4 x f(x) dx$$

construa uma fórmula de quadratura

$$Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f(3)$$

- (a) Determine as constantes A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja exacta quando f é um polinómio de grau ≤ 1 . Qual o grau de precisão da fórmula ? [2.0]
 - (b) Supondo que $f \in C^3[0, 4]$, obtenha uma expressão para o erro associado à fórmula de quadratura obtida na alínea anterior, que envolva a derivada de terceira ordem f''' . [2.0]
3. Considere a equação diferencial

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}, \quad x \in [1, 2],$$

com a condição inicial

$$y(1) = 2.$$

Usando o método de Euler com passo $h = 0.1$, obtenha um valor aproximado de $y(1.2)$. [1.0]