

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Exame de Análise Numérica/Métodos Numéricos - 15/07/2002
Cursos de Engenharia Civil, Electrotécnica e Naval
Apresente todos os cálculos que efectuar
I

1. Considere a função $f(x) = x^2 - \cos(x)$.

(a) Mostre que a função f tem dois e apenas dois zeros em $[-1, 1]$. [1.0]

(b) Usando $x_0 = 1$, e calculando os valores

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{\alpha} f(x_0), \text{ e } x_2 = x_1 - \frac{1}{\alpha} f(x_1), \quad \text{com } \alpha = f'(0.75),$$

verifique que o zero positivo, z , de f pertence ao intervalo $[x_1, x_2]$. Os valores x_1 e x_2 são as primeiras iteradas de um método do ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$. Diga qual é a função g e justifique se os pontos fixos de g coincidem com os zeros de f . [1.5]

(c) Mostre que o método do ponto fixo converge para o zero positivo de f , qualquer que seja a aproximação inicial x_0 escolhida no intervalo $I = [x_1, x_2]$ obtido na alínea anterior. Diga se essa convergência é ou não alternada. [1.5]

(d) Mostre que o método de Newton converge para o zero negativo de f , se a iterada inicial for $x_0 = -1$. Seria possível usar o método da alínea b) para aproximar esta raiz negativa? [1.5]

2. Seja $F \in C^2[a, b]$ e z o zero de F em $[a, b]$. Mostre que se

$$\max_{x \in [a, b]} |F''(x)| < \frac{2}{|b-a|} |F' \left(\frac{a+b}{2} \right)|$$

então o método iterativo

$$x_{m+1} = x_m - \frac{F(x_m)}{F' \left(\frac{a+b}{2} \right)}$$

converge para z desde que x_0 seja escolhido suficientemente próximo de z . [1.5]

II

Sabemos que o produto das matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+3b^2 & b & b & b \\ b & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -b & -b & -b \\ -b & 1+b^2 & b^2 & b^2 \\ -b & b^2 & 1+b^2 & b^2 \\ -b & b^2 & b^2 & 1+b^2 \end{bmatrix}$$

dá a matriz identidade. Pretende-se resolver um sistema $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$, em que $\mathbf{w}$ é um vector qualquer, verificando $\|\mathbf{w}\|_1 \geq 200$.

1. Fazendo $b = 10$, indique uma estimativa para o erro relativo de $\tilde{\mathbf{v}}$, solução de $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{w}}$, sabendo que $\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|_1 < 0.5$.
Confirme a estimativa anterior calculando os erros relativos no caso em que $\tilde{\mathbf{w}} = (301, 10, 10, 10)$ e $\mathbf{w} = (300.99, 10.1, 10.1, 10.1)$, a que correspondem as soluções, respectivamente, $\tilde{\mathbf{v}} = (1, 0, 0, 0)$ e $\mathbf{v} = (-2.01, 30.2, 30.2, 30.2)$. [2.5]
2. Mostre que para $|b| < 1$ está garantida a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel aplicado ao sistema $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$. [1.5]

III

1. Seja f uma função tal que $f(x_i) = \cos(\frac{1}{9}x_i^2)$, em que os x_i são os pontos do conjunto $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$. Pretende-se um valor aproximado para o integral

$$I = \int_{-3}^3 f(x) dx$$

- (a) Calcule a melhor aproximação possível para I pela regra dos trapézios, com nós igualmente espaçados. [1.0]
 - (b) Apresente uma estimativa para o erro anterior sabendo que $|f''(x)| \leq |(\cos(\frac{1}{9}x^2))''|$. [1.5]
 - (c) Aproxime I utilizando a regra de Simpson (não necessita de apresentar a estimativa de erro). [1.0]
2. Sabe-se que f é um polinómio de grau 4 que verifica $f^{(4)}(x) = 2, \forall x$, e toma os seguintes valores

x_i	0	2	4	6
$f(x_i)$	1	3	1	1

- (a) Obtenha um polinómio de grau ≤ 3 que interpole f nos pontos dados. [1.5]
- (b) Utilizando a alínea anterior, determine exactamente f . [1.5]
- (c) Indique qual o polinómio $g(x)$ de grau ≤ 3 que minimiza $\sum_{k=0}^3 |f(x_k) - g(x_k)|^2$. [1.0]

3. Considere a equação diferencial

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)}, \quad x \in [1, 2],$$

com a condição inicial

$$y(1) = -1.$$

Usando o método RK do ponto médio com passo $h = 0.2$, obtenha um valor aproximado da solução $y(x)$ em $x = 1.2$. [1.5]