Effektive Wirkungen in der Stringtheorie

Diplomarbeit
von
Sebastian Guttenberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Technische Universität München
Physik-Department
Institut für Theoretische Physik T30d
Prof. Dr. Manfred Lindner

angefertigt

am Lehrstuhl	und an der
Prof. Dr. V. Mukhanov	School of Mathematics
Sektion Physik	University of Dublin
LMU-München	Trinity College

bei
Dr. Ivo Sachs

31. Oktober 2002

Zusammenfassung

Durch Weyl-Invarianz-Forderung an die quantisierte Stringtheorie mit Hintergrund-Feldern ergeben sich Bewegungsgleichungen für die Hintergrundfelder, darunter auch modifizierte Einsteinsche Feldgleichungen. Eine Raumzeit-Wirkung, die durch Variation nach den Hintergrundfeldern gerade diese Bewegungsgleichungen reproduziert, wird als effektive Wirkung bezeichnet.

Im Allgemeinen ist es nur möglich, störungstheoretische Beiträge zu solch einer Wirkung in niedrigen Ordnungen von α' und in niedriger Schleifen-Ordnung (Baum-, 1-Schleifen-, ... Beiträge) zu berechnen. Ein Teil dieser Arbeit besteht darin, die wohlbekannten Bewegungsgleichungen in niedrigster Ordnung in α' in Baumgraphen-Näherung für geschlossene Strings zu reproduzieren. Dabei wird die Methode der ζ-Funktions-Regularisierung und Seeley-DeWitt-Entwicklung (heat-kernel-expansion) verwendet. Diese Methode ist durchaus gebräuchlich, wurde aber in genau diesem Zusammenhang noch nicht verwendet.

Es gibt jedoch auch Fälle, in denen man (unter bestimmten Nebenbedingungen an die Hintergrundfelder) zumindest bzgl. der α'-Entwicklung exakte effektive Wirkungen erhalten kann. So haben Fradkin und Tseytlin [FT85b] gezeigt, daß für das an die Ränder des offenen Strings koppelnde abelsche Eichfeld A_μ unter der Nebenbedingung einer konstanten Feldstärke $F_{\mu\nu}$, die sogenannte Born-Infeld-Wirkung $\Gamma[A] \propto \int \mathrm{d}^D X \sqrt{\det(\mathbf{1} + 2\pi\alpha' F)}$ eine in allen Ordnungen von α' exakte Baumgraphen-effektive-Wirkung darstellt.

Der zweite Teil der vorliegenden Arbeit erkundet die Möglichkeit, einen entsprechenden geschlossenen Ausdruck der effektiven Wirkung für die Hintergrundfelder des geschlossenen Sektors zu finden. Es erweist sich als äußerst schwierig zu vermeiden, daß die dazu nötigen Vorbedingungen nur noch triviale Felder zulassen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bedanken bei Dr. Ivo Sachs, durch den ich überhaupt erst in Kontakt mit der Stringtheorie gekommen bin, der meine Arbeit das ganze Jahr über mit großem Engagement betreut, und sich im besonderen während meines Aufenthaltes in Dublin viel Zeit für die Beantwortung meiner Fragen und auch für die Lösung organisatorischer Probleme genommen hat. Des weiteren möchte ich mich bedanken bei Prof. Manfred Lindner von der Technischen Universität München, der mir diese Diplomarbeit ermöglichte, sowie bei Prof. V. Mukhanov für den zur Verfügung gestellten Arbeitsplatz an der Ludwig-Maximilians-Universität.

Weiterer Dank gebührt Josef Dorfmeister, für einige Diskussionen und wertvolle Hinweise, Christian Sicka für gemeinsame Mensagänge und das Korrekturlesen großer Passagen, sowie meinem "Leidensgenossen" Marcus Baumgartl für ebenfalls einige Diskussionen und das Korrekturlesen fast der gesamten Arbeit.

Let me further thank Madhavan Varadarajan, who happened to share sometimes an office with me and just could not escape my numerous questions about quantum field theory stuff. Especially my point of view concerning Euclideanization ist mainly based on his explanations. (Although I don't know if he agreed after reading it ;-)

I would also like to mention Andrey O. Barvinsky, Sergey Solodukhin and finally the people who took part at www.superstringtheory.com at the online string theory course, among them the instructor Gavin Polhemus and Fynn1 (username), who also answered a lot of my questions.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung . . . 0
Danksagung . . . 1
Dieses Inhaltsverzeichnis . . . 2
Notationen und Bezeichnungen . . . 4

Ziel, Aufbau und wichtigste Ergebnisse der Arbeit **5**

1 Effektive Wirkungen **7**
1.1 Quanten- und Hintergrund- Effektive Wirkung in der Quantenfeldtheorie . . . 7
1.2 String-Effektive-Wirkung nach Fradkin und Tseytlin . . . 10
1.3 Effektive Wirkung aus Forderung nach Weyl-Invarianz . . . 11
1.4 Born-Infeld-Wirkung . . . 13

2 Feldgleichungen in niedrigster Ordnung α' **15**
2.1 Entwicklung der Wirkung, Fluktuationsoperator O . . . 16
2.2 Vernachlässigung der höheren Terme in α' . . . 19
2.3 Variation des klassischen Dilatonterms unter Weyl-Trafo . . . 21
2.4 Variation der Determinante des Fluktuationsoperators . . . 22
2.5 Variation der Faddeev-Popov-Determinante . . . 24
2.5.1 Eichfixierung und Faddeev-Popov-Determinante Δ_{FP} . . . 24
2.5.2 Berechnung von $P_1^\dagger P_1$ . . . 27
2.5.3 Variation von Δ_{FP} . . . 28
2.6 Bewegungsgleichungen für die Hintergrundfelder . . . 30

3 Kovariante Ableitung und ihre Feldstärke **31**
3.1 Kovarianz von O und die Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung . . . 31
3.1.1 Transformation von x unter Raumzeit-Diffeomorphismen . . . 31
3.1.2 Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung . . . 32
3.2 Feldstärke F_{ab} . . . 33
3.3 Einige Geometrische Betrachtungen . . . 35

4 Auf der Suche nach dem Born-Infeld-Gegenstück **39**
4.1 Die Schwinger-Methode . . . 40
4.1.1 Überführung der Wärmeleitungs- in eine Schrödinger-ähnliche Gleichung . . . 41
4.1.2 Schwinger-Methode . . . 41
4.1.3 Zur Selbstadjungiertheit (Hermitizität) von $\hat{\pi}$ und $\hat{H}$, bzw. Symmetrie von O . . . 44
4.1.4 Schrödinger Bild $\rightarrow$ Heisenberg Bild . . . 45
4.1.5 Berechnung des Evolutionsoperators $U(\sigma,\sigma';\tau)$ und des Heat-Kernels $K(\sigma,\sigma';t)$ . . . 47
4.1.6 Berücksichtigung einer infinitesimalen Krümmung . . . 55
4.1.7 Berechnung der Determinante $\mathrm{Det}\, O$ . . . 55
4.2 Effektive Wirkung aus der Schwinger-Methode . . . 56
4.3 Untersuchung der Nebenbedingungen aus der Schwinger-Methode . . . 57
4.3.1 Kovariante Ableitungen von C und F . . . 57

4.3.2 Zeitliche Konstanz des Feldstärke-Operators . . . 59
4.3.3 Hochsymmetrische Räume . . . 59
4.4 Bedingungen an Hintergrundfelder für exaktes Gauß-Integral . . . 60
4.5 Andere Möglichkeiten . . . 62

Ausblick **65**

Anhang 67

A Euklidisierung **67**
A.1 Euklidisierung des Skalarfeld-Pfadintegrals . . . 67
A.1.1 Überblick . . . 67
A.1.2 Der Grund für die analytische Fortsetzung . . . 70
A.1.3 Berechnung von $<\phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau>$, natürliches Auftreten des euklidischen Pfadintegrals . . . 71
A.2 Euklidisierung der Worldsheet-Metrik . . . 74

B Klassische Bewegungsgleichung **77**

C Mehrdimensionale Gauß-Integrale und Funktionaldeterminanten **79**
C.1 Bosonische Variablen . . . 79
C.2 Grassman-Variablen . . . 80

D ζ-Funktions-Regularisierung von Funktionaldeterminanten **82**
D.1 Verallgemeinerte ζ-Funktion und ζ-regularisierte Funktionaldeterminante . . . 82
D.2 Globale Skalierung des Operators . . . 83
D.3 Lokale Skalierung des Operators . . . 84
D.3.1 Skalierung der Form $\alpha(\sigma)O$ . . . 84
D.3.2 “Skalierung” der Form $\alpha P_1^\dagger \alpha^{-1} P_1 \alpha$ . . . 85
D.4 Berechnung von $\zeta_O(0)$ . . . 86
D.5 Operatoren mit Nullmoden . . . 87

E Sonstiges **88**
E.1 Ein paar Formeln zur Γ-Funktion . . . 88
E.2 Christoffel-Symbole und Krümmungstensoren . . . 88
E.2.1 Allgemeines . . . 88
E.2.2 Konforme Eichung . . . 89
E.2.3 Komplexe Koordinaten (ausgehend von konformer Eichung) . . . 90
E.2.4 Lichtkegel-Koordinaten (ausgehend von konformer Eichung) . . . 91
E.3 Variation verschiedener Größen . . . 91
E.3.1 Variation einer Determinanten (und des Logarithmus') . . . 91
E.3.2 Variation der Inversen . . . 92
E.3.3 Variation der Krümmungstensoren unter Weyl-Transformation . . . 92

Literaturverzeichnis **95**

Notationen und Bezeichnungen

- □ Im Text wird auf eine Übersetzung des Englischen Begriffs "Worldsheet" nach "Weltblatt" o.ä. verzichtet. Auch der Begriff "Heat Kernel" (Integralkern der Wärmeleitungsgleichung) wird direkt aus dem Englischen übernommen.
- □ Worldsheet-Indizes werden mit lateinischen Buchstaben $a, b, \ldots$ bezeichnet, Raumzeit-Indizes dagegen mit griechischen $\alpha, \beta, \ldots$
- □ Die minkowskische Worldsheet-Metrik wird bezeichnet mit h_{ab}, mit Indizes $a, b, \ldots \in \{0, 1\}$. Sie hat bei uns die Signatur $(-1, 1)$. Die euklidische Worldsheet-Metrik bezeichnen wir mit g_{ab}. Für diesen Fall sind die Indizes aus $a, b, \ldots \in \{1, 2\}$.
- □ $\Box_g$ bezeichnet den Laplace-Operator auf dem euklidischen Worldsheet, $\Box_h$ den D'Alembert-Operator auf dem minkowskischen Worldsheet. Ohne Index ist $\Box$ der D'Alembert bzw. Laplace-Operator in der Raumzeit. Gleiches gilt für den Krümmungsskalar R_g. In Anhang E ist der Index weggelassen, da Raumzeit- und Worldsheet-Größen sich nicht mischen und einige Gleichungen auch in beiden Fällen anwendbar sind. Die Begriffe "D'Alembert Operator" und "Laplace Operator" werden in dieser Arbeit synonym verwendet.
- □ Die minkowskische Raumzeit-Metrik wird bezeichnet mit $G_{\mu\nu}$ mit Indizes $\mu, \nu \in \{0, \ldots, D-1\}$, ebenfalls mit Signatur $(-1, 1, \ldots, 1)$. Für die euklidische Raumzeit-Metrik wird dasselbe Symbol benützt. Das sollte aus dem Zusammenhang klar werden. Die Indizes sind dann $\mu, \nu \in \{1, \ldots, D\}$.
- □ ϵ^{ab} habe sowohl im Minkowskischen als auch im Euklidischen die Signatur der Permutation der Indizes. Also $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1, \quad \epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$, bzw. $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1, \quad \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$. Der antisymmetrische ε-(Pseudo-) Tensor ist dann jeweils definiert durch $\varepsilon^{ab} = \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{-h}}$ bzw. $\varepsilon^{ab} = \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}}$.
- □ Es werden natürliche Einheiten mit $\hbar = c = 1$ verwendet, der String-Parameter α' (Regge-Slope) wird jedoch beibehalten.
- □ Die Vorzeichen-Konventionen der Krümmungstensoren sind im Anhang ((**E**.7)-(**E**.9)) zu finden.
- □ $p.I.$ über Gleichheitszeichen ($\overset{p.I}{=}$) steht für partielle Integration. In der gesamten Arbeit werden geschlossene Strings in Baumgraphen-Näherung betrachtet. Also haben die Worldsheets stets keine Ränder.
- □ Ein Komma vor einem Index steht für eine partielle Ableitung (z.B. $A_{b,a} \equiv \partial_a A_b$), ein Strichpunkt für eine kovariante Ableitung (bezüglich Diffeomorphismen, z.B. $A_{b;a} \equiv \nabla_a A_b \equiv \partial_a A_b - \Gamma^c_{ab} A_c$).
- □ $\mathrm{Tr}\, O$ soll die Spur über alle Indizes (inklusive der kontinuierlichen) kennzeichnen, während $\mathrm{tr}\, A$ nur die Spur über diskrete Indizes bedeutet. Ebenso steht $\mathrm{Det}\, O$ für die (Funktional-)Determinante eines Differentialoperators, während $\det A$ die Determinante einer Matrix mit diskreten Indizes kennzeichnet. Ein angefügter Strich (Tr' , tr' , Det' , $\det'$) zeigt jeweils die Auslassung der Nullmoden an. Das bezieht sich auf den jeweils betrachteten Operator. Bei der Spurbildung einer Funktion des Operators $\mathrm{Tr}'F(O)$ (wie z.B.$\mathrm{Tr}'e^{-tO}$) werden also die Nullmoden von O und nicht die von $F(O)$ weggelassen. Letztere fallen bei Spurbildung sowieso weg. Hat man kombinierte Worldsheet- und Raumzeit-Indizes, so soll $\tilde{\mathrm{tr}}$ die Spur über die Worldsheet-Indizes kennzeichnen.
- □ Operatoren in abstrakten Hilberträumen tragen ein Dach$\widehat{\ }$, während die entsprechenden Differential-Operatoren in der Ortsdarstellung durch dasselbe Symbol ohne Dach gekennzeichnet werden.
- □ Ein Stern $(\ldots)^*$ kennzeichnet das komplex Konjugierte. Nur bei komplexen Koordinaten z, $\bar{z}$ ist das komplex Konjugierte von z durch den Balken ausgedrückt. Dagegen steht $\bar{X}$ in Abschnitt 2.1 für die Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen und $\bar{\phi}$ in 1.1 für das Hintergrundfeld.
- □ Bei Fußnoten kennzeichnet ♣ das Ende der Fußnote. Sollte dieses Symbol am Ende einer Fußnote fehlen, heißt das entweder, daß es vergessen wurde, oder daß die Fußnote auf der nächsten Seite fortgesetzt wird.
- □ Nach in den Satzbau eingefügten aber abgesetzten Formeln sind grundsätzlich keine Satzzeichen verwendet worden.
- □ Die Arbeit ist mit dem Textverarbeitungsprogramm LyX, welches auf LaTeX basiert, nach den Regeln der alten Rechtschreibung verfaßt.

Ziel, Aufbau und wichtigste Ergebnisse der Arbeit

Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeit war es, eine effektive Wirkung für die masselosen Hintergrundfelder des geschlossenen bosonischen Strings zu suchen, die auf Baumgraphen-Niveau exakt sind bezüglich der Entwicklung im String-Parameter α'. John Schwarz hatte 2001 in einem Vortrag auf der *Strings 2001* in Indien [Schc] und später auch in einem Vortrag in *Stony Brook* [Schb] auf die Bedeutung einer solchen effektiven Wirkung hingewiesen. Eine derartige effektive Wirkung, die exakt in allen Ordnungen α' ist, existiert bisher nur für das an die Enden des offenen Strings koppelnde abelsche Eichfeld A_μ. Sie stimmt überein mit der sogenannten Born-Infeld-Wirkung (siehe Abschnitt 1.4 auf Seite 13).

Im ersten Kapitel verschaffen wir uns einen groben Überblick über den Begriff der effektiven Wirkung: Abschnitt 1.1 läßt die Quanten-effektive Wirkung aus der Quantenfeldtheorie Revue passieren und zeigt deren Beziehung zur sogenannten Hintergrundfeld-effektiven Wirkung. In Abschnitt 1.2 führen wir nach [FT85a, FT85c] eine entsprechende effektive Wirkung für die Stringtheorie ein und stellen in Abschnitt 1.3 den Zusammenhang dieser Wirkung zu einer effektiven Wirkung aus der Forderung nach Weyl-Invarianz der quantisierten Theorie dar. Im Anschluß wird in Abschnitt 1.4 auf Seite 13 noch kurz die Born-Infeld-Wirkung, die ja Motivation für diese Arbeit war, vorgestellt.

Das als Einarbeitung gedachte Problem, vorerst die wohlbekannten Feldgleichungen für die masselosen Hintergrundfelder (Raumzeitmetrik $G_{\mu\nu}$, Axionfeld $B_{\mu\nu}$ und Dilatonfeld Φ) zu reproduzieren, wurde wegen einiger technischer Details fast zum Hauptteil dieser Arbeit. In Kapitel 2 ab Seite 15 widmen wir uns dieser Aufgabe. Entgegen der üblichen Methode über die Spur des quantisierten Energie-Impuls-Tensors (siehe Seite 12 in Abschnitt 1.3) gehen wir einen direkteren Weg:
In Abschnitt 2.1 entwicklen wir ähnlich wie bei anderen Ansätzen die klassische Wirkung um die Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen, was zur Folge hat, daß der lineare Entwicklungsterm verschwindet und die Partitionsfunktion (**2**.6) von Seite 15 in quadratischer Näherung ein Gauß-Integral ergibt. Der quadratische Entwicklungsterm (Seite 17) enthält einen Pseudodifferentialoperator, wir nennen ihn Fluktuationsoperator. Da wir später seinen ersten Seeley-DeWitt-Koeffizienten benötigen werden, bringen wir ihn auf eine Standardform (siehe (**2**.43) bis (**2**.46), Seite 19) und führen dabei eine Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung ein, die uns in Kapitel 3 beschäftigen wird.
Anschließend argumentieren wir in Abschnitt 2.2 (Seite 19), daß die höheren Terme der Entwicklung der klassischen Wirkung Beiträgen von höherer Ordnung in α' zur Weyl-Invarianz-Forderung entsprechen und deshalb vernachlässigt werden können. Die Integration des quadratischen Terms ergibt schließlich im wesentlichen die Funktionaldeterminante des Fluktuationsoperators.
Die Forderung nach Weyl-Invarianz ist in ihren verschiedenen Formen in den Gleichungen (**2**.8) auf Seite 15, (**2**.11) auf Seite 16 und schließlich (**2**.64) auf Seite 21 zu finden. Sie enthält neben der Variation der eben erwähnten Determinante des Fluktuationsoperators auch die Variation der klassischen Wirkung und die Variation der aus der Eichfixierung stammenden Faddeev-Popov-Determinante.
Die Variation der klassischen Wirkung nach dem Weyl-Parameter, die in Abschnitt 2.3 auf Seite 21 behandelt wird, stellt sich als problemlos dar. Die in Abschnitt 2.4 auf Seite 22 behandelte Variation der Funktionaldeterminante basiert auf einer einfachen lokalen Skalierung des Fluktuationsoperators unter Weyl-Transformation (siehe (**2**.90) auf Seite 23). Unter Verwendung der verallgemeinerten ζ-Funktion zur Regularisierung der Funktionaldeterminante (siehe Anhang D auf Seite 82) kann mit dieser lokalen Skalierung das Ergebnis der in den Anhang (Abschnitt D.3.1 auf Seite 84) ausgelagerten Rechnung zur Variation einer lokal skalierten Funktionaldeterminante verwendet werden.

Man erhält dabei einen Bezug zum ersten Seeley-DeWitt-Koeffizienten des Fluktuationsoperators, dem ersten Entwicklungskoeffizienten der gleichnamigen Entwicklung des Heat-Kernels. (siehe ebenfalls Anhang D auf Seite 82). Die ersten Seeley-DeWitt-Koeffizienten wiederum können für viele Operatoren in Standardform in einigen Referenzen nachgeschlagen werden (z.B. [WW94, S.157],[BCVZ96, S.104]).
Die Variation der Faddeev-Popov-Determinante in (Abschnitt 2.5 auf Seite 24) wird bereits ausführlich beschrieben in den Referenzen [Alv83, Weib]. Während dort jedoch ein sehr allgemeiner Formalismus eingeführt wird, der die eigentliche Rechnung etwas verbirgt, wird auf diesen in der vorliegenden Arbeit weitgehend verzichtet. Zudem wird in den erwähnten Referenzen anstatt der ζ-Funktions-Methode, wie wir sie verwenden, eine im Englischen *proper time method* genannte Methode (die der ζ-Funktionsmethode durchaus ähnlich ist), verwendet. Wieder führen wir die Variation der Determinante auf den ersten Seeley-De-Witt-Koeffizienten zurück. Dieses Mal handelt es sich jedoch um eine komplexere lokale Skalierung, die einem die Seeley-DeWitt-Koeffizienten zweier unterschiedlicher Operatoren liefert. Auch diese Rechnung ist ausgelagert in den Anhang (Abschnitt D.3.2 auf Seite 85).
Die Ergebnisse der Variationen der unterschiedlichen Terme nach dem Weyl-Parameter werden schließlich in Abschnitt 2.6 auf Seite 30 zu den Feldgleichungen (**2**.172 auf Seite 30) bis (**2**.174 auf Seite 30) in niedrigster Ordnung im Stringparameter α' zusammengefaßt.

Kapitel 3 (ab Seite 31) beschäftigt sich mit der in Kapitel 2 definierten Raumzeit-kovarianten Worldsheet-Ableitung. Der erste Abschnitt 3.1 auf Seite 31 motiviert die Einführung dieser Ableitung über das Transformationsverhalten der Quantenfluktuationen unter Raumzeit-Diffeomorphismen und ist somit ein Nachtrag zu Kapitel 2. Die Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung enthält eine Faserbündel-Konnexion, die bekanntlich als Eichfeld interpretiert werden kann. Im darauffolgenden Abschnitt 3.2 auf Seite 33 wird (unter anderem als Vorbereitung auf den späteren Abschnitt 4.1 auf Seite 40) die Feldstärke dieses Eichfeldes berechnet (siehe (**3**.50), Seite 35). Sie weist eine erstaunliche Ähnlichkeit zur Inhomogenität unseres Fluktuationsoperators auf. (Dieser ist von der Form $O = -D^2 + C$, wobei C die Inhomogenität und D die kovariante Ableitung ist.) Die Untersuchung dieser Ähnlichkeit ist Thema des Abschnitts 3.3 auf Seite 35. Es zeigt sich, daß man eine Verbindung der beiden Größen herstellen kann, wenn man eine nicht-torsionsfreien Raumzeit-Konnexion (**3**.52) einführt. Die Feldstärke kann man dann gerade durch den antisymmetrischen und die Inhomogenität durch den symmetrischen Anteil des zu der neuen Konnexion gehörigen Krümmungstensors ausdrücken (siehe (**3**.68) und (**3**.69), Seite 37). Ein verbleibender Dilatonterm in beiden Ausdrücken ist jeweils der antisymmetrische bzw. symmetrische Anteil einer ebenfalls mit der neuen Konnexion gebildeten zweifach angewendeten kovarianten Ableitung auf das Dilatonfeld. Abschließend wird in (**3**.83) noch ein Zusammenhang zwischen der neuen kovarianten Raumzeit-Ableitung und unserer Raumzeit-kovarianten Worldsheet-Ableitung hergestellt.

Im vierten Kapitel kommen wir schließlich zurück zur ursprünglichen Idee, der Suche nach einer effektiven Wirkung für die Hintergrundfelder des geschlossenen bosonischen Strings, die exakt in allen Ordnungen in α' ist. Eine erste Idee verfolgt den Ansatz, anzunehmen, daß es nichttriviale Nebenbedingungen an die Hintergrundfelder gibt, so daß das Gaußsche Integral, welches auch schon in Kapitel 2 betrachtet wird, keine Näherung, sondern exakt ist. Die Möglichkeit dieser Annahme werden wir in Abschnitt 4.4 auf Seite 60 untersuchen. Zuvor, in Abschnitt 4.1 ab Seite 40 versuchen wir, für die bei der Gauß-Integration entstehende Determinante mithilfe einer Methode von Schwinger einen geschlossenen Ausdruck zu finden. Als Funktional der Hintergrundfelder ist diese im wesentlichen die effektive Wirkung im Sinne von Fradkin und Tseytlin. In diesem Zusammenhang von der Suche nach einer effektiven Wirkung zu sprechen ist vielleicht etwas irreführend. Die effektive Wirkung, die man aus dieser Gauß-Integration erwartet, sollte sich nicht wesentlich unterscheiden von der Niederenergie-effektiven Wirkung in (**1**.44) auf Seite 12. Was sie zu einem Gegenstück zur Born-Infeld-Wirkung machen würde, wären erst entsprechende Nebenbedingungen an die Hintergrundfelder, die diese Wirkung exakt machen würden. Dennoch ist die Anwendung der Schwingermethode in Abschnitt 4.1 für sich ein interessantes Problem. Die in [Sch51] ursprünglich für abelsche Eichfelder entwickelte Methode und in [Sac94] für nichtabelsche Eichfelder (und gekrümmte Räume) erweiterte Methode, wird hier angewandt und ausführlich beschrieben. Zur Unterbringung des Inhomogenitätsterms C, muß der Formalismus an manchen Stellen noch ein wenig modifiziert werden. Leider blieb dem Autor in Abschnitt 4.3 auf Seite 57 nicht mehr viel Zeit für die Untersuchung der Nebenbedingungen, die während der Anwendung der Schwinger-Methode gestellt werden mußten. Der folgende Abschnitt 4.4 auf Seite 60 beschäftigt sich dann, wie bereits erwähnt, mit der Möglichkeit, Nebenbedingungen an die Hintergrundfelder zu stellen, so daß das Gauß-Integral exakt wird. Diese Bedingungen würden zu denen aus der Schwingermethode hinzukommen. Deshalb ist es leider sehr wahrscheinlich, daß nur noch triviale Felder all diese Bedingungen erfüllen können. In dem abschließenden Abschnitt 4.5 auf Seite 62 werden dann schliesslich noch zwei unausgereifte Ideen vorgestellt, wie man alternativ zu geschlossenen Ausdrücken für eine exakte effektive Wirkung kommen könnte.

Kapitel 1

Effektive Wirkungen

1.1 Quanten- und Hintergrund- Effektive Wirkung in der Quantenfeldtheorie

Die Quanten-effektive Wirkung ist ein gängiges Hilfsmittel in der Pfadintegralbeschreibung von Quantenfeldtheorien. Der Vollständigkeit halber soll sie hier kurz für ein Skalarfeld in D Dimensionen wiederholt werden. Beschreibungen findet man in fast allen Lehrbüchern zur Quantenfeldtheorie. (siehe z.B. [GR, S.465],[Pok, S.109],[PS, S.364], für die euklidische Darstellung siehe [WW94, S.128] und [Nak, S.4-7])

Gegeben sei die klassische euklidische Wirkung[1] $S[\Phi]$. Das **erzeugende Funktional** für die euklidischen n-Punkt-Greens-Funktionen (die sog. Vakuum-Persistenz-Amplitude) sei definiert durch

$$Z[j] \equiv <\Omega|\Omega>_j \equiv \mathcal{N} \int \mathrm{D}\phi e^{-S[\phi]-\int \mathrm{d}^D x j(x)\phi(x)} \qquad (\mathbf{1}.1)$$

wobei

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \mathrm{D}\phi e^{-S[\phi]} \qquad (\mathbf{1}.2)$$

ein Normierungsfaktor ist, so daß $Z[0] = 1$. Für $j = 0$ ist $Z[j]$ gleich der **Partitionsfunktion**. Mit dieser Definition gilt für die euklidischen n-Punkt-Funktionen

$$G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \equiv <\Omega|T\hat{\phi}(x_1)\ldots\hat{\phi}(x_n)|\Omega> \stackrel{!}{=} (-1)^n \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1)\ldots\delta j(x_2)} \qquad (\mathbf{1}.3)$$

Definieren wir nun noch das erzeugende Funktional für zusammenhängende Greensfunktionen

$$\begin{aligned} W[j] &\equiv -\ln Z[j] && (\mathbf{1}.4)\\ G^{(n)}_{zus}(x_1, \ldots, x_n) &= (-1)^n \frac{\delta^n W[j]}{\delta j(x_1)\ldots\delta j(x_n)} && (\mathbf{1}.5) \end{aligned}$$

Beachte: in einigen Texten findet man die Bezeichnungen genau umgekehrt, also Z für die Erzeugende der zusammenhängenden n-Punkt-Funktionen, und W für die aller n-Punkt-Funktionen.

Die erzeugende Funktion für ein-Teilchen-irreduzible n-Punkt-Funktionen $G^{(n)}_{OPI}(x_1, \ldots, x_n)$ schließlich, erhält man durch eine Legendre-Transformation. Das zu j kanonisch konjugierte *mittlere Feld*

$$\varphi(x) \equiv \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = <\hat{\phi}(x)>_j \qquad (\mathbf{1}.6)$$

ist gleich dem Erwartungswert des Feldoperators unter Anwesenheit einer externen Quelle j. Führt man mit dieser neuen Variablen eine Legendre-Transformation durch, so erhält man das gesuchte Funktional

$$\Gamma[\varphi] \equiv W[j] - \int \mathrm{d}^D x j(x)\varphi(x) \qquad (\mathbf{1}.7)$$

[1] Zur Euklidisierung siehe Anhang A ♣

wobei alle j durch φ ausgedrückt werden müssen (Das impliziert die Umkehrbarkeit von (**1**.6)).

$\Gamma[\varphi]$ generiert aber nicht nur die ein-Teilchen-irreduzible n-Punkt-Funktionen, sondern dient auch als **effektive Wirkung** für das mittlere Feld. Das wollen wir im folgenden etwas genauer betrachten. Variiere dazu die effektive Wirkung nach dem Feld φ:

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)} = \int \mathrm{d}^D x \underbrace{\frac{\delta W[j]}{\delta j(x)}}_{\varphi(x)} \frac{\delta j(x)}{\delta\varphi(y)} - j(y) - \int \mathrm{d}^D x \frac{\delta j(x)}{\delta\varphi(y)} \varphi(x) = -j(y) \tag{1.8}$$

Fordert man also, daß die Variation der effektiven Wirkung verschwindet

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)} = -j(y) \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.9}$$

so sind die Lösungen φ_0 gerade die Vakuumerwartungswerte des Feldoperators ohne externe Quelle j

$$\varphi_0(x) =< \hat{\phi}(x) > \tag{1.10}$$

Somit gibt einem die effektive Wirkung Bewegungsgleichungen für den Vakuumerwartungswert eines Feldes. In niedrigster Ordnung von $\hbar$ (wenn man es wieder einführt und danach entwickelt) sind diese Bewegungsgleichungen gerade gleich den klassischen Bewegungsgleichungen und φ_0 stimmt überein mit ϕ_0, der Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen.

Ein weiterer interessanter Aspekt der effektiven Wirkung zeigt sich, wenn man die Legendre-Transformation (**1**.7) umkehrt

$$W[j] = \Gamma[\varphi] + \int \mathrm{d}^D x j(x)\varphi(x) \tag{1.11}$$

und das ursprüngliche erzeugende Funktional Z mit Hilfe der effektiven Wirkung ausdrückt:

$$Z[j] = e^{-W[j]} = e^{-\Gamma[\varphi] - \int \mathrm{d}^D x j(x)\varphi(x)} \tag{1.12}$$

Ausgedrückt durch die klassische Wirkung (**1**.1) hat es dagegen die Form

$$Z[j] = \mathcal{N} \int \mathrm{D}\phi e^{-S[\phi] - \int \mathrm{d}^D x j(x)\phi(x)} \tag{1.13}$$

Die Integration über das Feld bleibt bei der effektiven Wirkung also aus. Würde man die Integration im zweiten Fall unterdrücken, bekäme man gerade die Baumgraphen-Näherung. Der exakte Ausdruck muß dann durch Schleifenbeiträge ergänzt werden. Dagegen erhält man mit der effektiven Wirkung das exakte erzeugende Funktional bereits in Baumgraphen-Ordnung. Die effektive Wirkung enthält also schon alle Schleifen-Beiträge.

Es ist in der Quantenfeldtheorie aber auch noch eine andere effektive Wirkung verbreitet. Sie nennt sich **Hintergrund-effektive-Wirkung** (siehe [Abb81, AGS83, FPQ01], [Pok, S. 281], [Sac97, S.18], [Weia, S.67]) und ist von besonderer Bedeutung in Eichfeldtheorien. Da wir nur eine Vorstellung von ihr gewinnen wollen, um die effektive Wirkung in der Stringtheorie im nächsten Abschnitt zu motivieren, überspringen wir in der Darstellung einige Details. Die zugrundeliegende Idee ist, das zu quantisierende Feld in ein Hintergrundfeld $\bar{\phi}$ und ein Quantenfluktuationsfeld ϕ (es trägt hier bewußt dieselbe Bezeichnung wie zuvor das "komplette" Feld, da es hier als Integrationsvariable dienen wird)

$$\phi \to \bar{\phi} + \phi \tag{1.14}$$

zu zerlegen. Man kann dann bei der Eichfixierung die sogenannte Hintergrundfeldeichung derart wählen, daß die Eichinvarianz bzgl. des Hintergrundfeldes $\bar{\phi}$ erhalten bleibt und nur die Eichinvarianz des Quantenfluktuationsfeldes ϕ gebrochen wird. Die erzeugenden Funktionale definiert man in der Hintergrundfeldmethode genauso, wie im konventionellen Ansatz, integriert jedoch nur über das Quantenfluktuationsfeld. Zudem koppelt man das externe Quellfeld, um die Eichinvarianz des Hintergrundfeldes $\bar{\phi}$ nicht wieder zu zerstören, nur an das Quantenfluktuationsfeld ϕ und wählt den Eichfixierungsterm entsprechend erwähnter Eichung, wodurch man eine weitere funktionale Abhängigkeit vom Hintergrundfeld erhält.

$$\tilde{Z}[j,\bar{\phi}] \equiv \int \mathrm{D}\phi e^{-\int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}(\bar{\phi}+\phi, \partial_\mu\bar{\phi}+\partial_\mu\phi) - \int \mathrm{d}^4 x j\phi} \tag{1.15}$$

$\mathcal{L}$ enthält hier die Eichfixierungsterme bereits, und Dϕ stellt bereits das fertige Maß des eichfixierten Integrals dar (also inklusive Geist-Determinante, die uns hier noch nicht beschäftigen soll). Der Zusammenhang zum konventionellen Funktional $Z[j]$ ist dann

$$\tilde{Z}[j, \bar{\phi}] = Z[j] e^{\int \mathrm{d}^4 x j \bar{\phi}} \tag{1.16}$$

Dabei muß in Z der Eichfixierungsterm so gewählt werden, daß sich für $\tilde{Z}$ gerade die Hintergrundeichung ergibt. In diesem Sinne ist auch $Z[j]$ ein Funktional von $\bar{\phi}$. Wir definieren weiterhin analog zum konventionnellen Fall

$$\tilde{W}[j, \bar{\phi}] \equiv -\ln \tilde{Z}[j, \bar{\phi}] \tag{1.17}$$

und die **Hintergrund-effektive-Wirkung** über die Legendre-Transformation

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{\varphi}, \bar{\phi}] \equiv \int \mathrm{d}^4 x j \tilde{\varphi} - \tilde{W}[j, \bar{\phi}] \tag{1.18}$$

mit zu j kanonisch konjugiertem Feld

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv \frac{\delta \tilde{W}[j, \bar{\phi}]}{\delta j(x)} \tag{1.19}$$

Aus (**1**.16) folgt, daß $\tilde{W}$ und W zusammenhängen über

$$\tilde{W}[j, \varphi] = W[j] + \int \mathrm{d}^4 x j \bar{\phi} \tag{1.20}$$

Ebenso wie Z hängt auch W durch den Eichfixierungsterm vom Hintergrundfeld $\bar{\phi}$ ab. Leitet man diese Beziehung nach $j(x)$ ab, so erhält man mit (**1**.27) und (**1**.6):

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \bar{\phi}(x) \tag{1.21}$$

Setzt man dieses Ergebnis zusammen mit (**1**.20) in die Definition der Hintergrund-effektiven-Wirkung (**1**.18), so ergibt sich

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{\varphi}, \bar{\phi}] = \int \mathrm{d}^4 x j \left(\varphi(x) + \bar{\phi}(x)\right) - \left(W[j] + \int \mathrm{d}^4 x j \bar{\phi}\right) = \Gamma[\varphi]|_{\varphi = \tilde{\varphi} - \bar{\phi}} \tag{1.22}$$

bzw.

$$\tilde{\Gamma}[0, \bar{\phi}] = \Gamma[\varphi|_{\varphi = -\bar{\phi}} \tag{1.23}$$

Wir erinnern daran, daß Γ auf der rechten Seite neben der expliziten Abhängigkeit von $\bar{\phi}$ über das Argument auch noch über den Eichfixierungsterm von $\bar{\phi}$ abhängt. Die ein-Teilchen-zusammenhängenden Greens-Funktionen

$$\tilde{G}^{(n)}_{OPI}(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^n \frac{\delta^n \tilde{\Gamma}[0, \bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x_1) \ldots \delta \bar{\phi}(x_n)} \tag{1.24}$$

aus der Hintergrund-effektiven Wirkung haben durch diese extra-Abhängigkeit eine andere Form, als die des konventionellen Ansatzes. Dennoch erzielt man für eichinvariante physikalische Größen über beide Methoden dasselbe Ergebnis, was in [AGS83] gezeigt wurde. In diesem Sinne sind die beiden Ansätze also äquivalent. Eine entscheidende Beobachtung ist nun noch, daß nach (**1**.18)

$$\tilde{\Gamma}[0, \bar{\phi}] = -\tilde{W}[j, \bar{\phi}]\Big|_{\tilde{\varphi}=0} \tag{1.25}$$

und somit

$$\boxed{\Gamma[\varphi]|_{\varphi=-\bar{\phi}} = -\tilde{W}[j, \bar{\phi}]\Big|_{\tilde{\varphi}=0}} \tag{1.26}$$

Die Nebenbedingung $\tilde{\varphi} = 0$ ist nach (**1**.27) gerade

$$\frac{\delta \tilde{W}[j, \bar{\phi}]}{\delta j(x)} \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.27}$$

Des weiteren erhalten wir wie in (**1**.9) und (**1**.10) durch die Forderung, daß die Variation nach dem Hintergrundfeld verschwindet

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}}\,\Gamma[\varphi]\big|_{\varphi=-\bar{\phi}} = -\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}}\,\tilde{W}[j,\bar{\phi}]\Big|_{\tilde{\varphi}=0} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (\mathbf{1}.28)$$

die Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte der Quantenfelder, also die Bewegungsgleichungen für die Hintergrundfelder. Diese Bedingung ist auch äquivalent zur Forderung

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}}\,\tilde{Z}[j,\bar{\phi}]\Big|_{\tilde{\varphi}=0} \stackrel{!}{=} 0} \qquad (\mathbf{1}.29)$$

1.2 String-Effektive-Wirkung nach Fradkin und Tseytlin

Fradkin und Tseytlin haben 1985 (siehe [FT85c, FT85a], außerdem auch [GSWb, S.307]) eine Off-Shell effektive Wirkung für den String definiert, welche weitgehend analog ist zur eben beschriebenen Hintergrund-effektiven-Wirkung in der Quantenfeldtheorie.

Beginnen wir mit der klassischen euklidischen Wirkung[1] für einen String, der durch eine flache Raumzeit ohne Hintergrundfelder propagiert, der Polyakov-Wirkung:

$$S_{p0}[X,g] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}g^{ab}\partial_a X^\mu \delta_{\mu\nu}\partial_b X^\nu \qquad (\mathbf{1}.30)$$

Die Partitionsfunktion ausgedrückt durch ein eichfixiertes[2] Polyakov-Pfadintegral hat die Form

$$Z[g] = \int \mathrm{D}X\,\Delta_{FP}[g]e^{-S_{p0}[X,g]} \qquad (\mathbf{1}.31)$$

Die Amplituden in Baumgraphen-Ordnung für die Streuung der skalaren Grundzustands(Tachyon)-Stringmoden sind nach [FT85c, S.3] gegeben durch

$$G^{(n)}(X_1,\ldots,X_n) = \left\langle \prod_{k=1}^{n}\int \mathrm{d}^2\sigma_k\sqrt{g(\sigma)}\,\delta^{(D)}(X_k - X(\sigma_k))\right\rangle \qquad (\mathbf{1}.32)$$

wobei die Worldsheet-Mannigfaltigkeit als geschlossen und einfach zusammenhängend (also mit der Topologie einer Sphäre) angenommen wird (Darin steckt die Baumgraphen-Ordnung). Mit Hilfe einer externen Quelle $T(X(\sigma))$ kann man ein erzeugendes Funktional (das später ebenfalls den Namen effektive Wirkung bekommen wird) für diese n-Punkt-Funktionen hinschreiben

$$S^{(0)}_{eff}[T] = \left\langle \exp\left\{-\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}T(X(\sigma))\right\}\right\rangle \qquad (\mathbf{1}.33)$$

$$G^{(n)}(X_1,\ldots,X_n) \sim \left.\frac{\delta^N S^{(0)}_{eff}[T]}{\delta T(X_1)\cdots\delta T(X_n)}\right|_{T=0} \qquad (\mathbf{1}.34)$$

Der Index $^{(0)}$ steht für "Baumgraphen-Ordnung". $T(X)$, das sogenannte Tachyonfeld, übernimmt also die Rolle des Hintergrundfeldes in (**1**.24). Seltsam ist nur, daß unser Funktionalintegral nicht über ein Tachyonfeld geht, sondern über die Raumzeit-Koordinate X. Man kann jedoch die Integration über X gedanklich aufteilen in unendlich viele Integrationen über die einzelnen String-Moden. Jede dieser Moden entspricht dann einem Quantenfeld für ein bestimmtes Teilchen. Das Tachyonfeld ist nur das Hintergrundfeld zur niedrigsten Mode. Die Form von (**1**.33) entspricht gerade dem Hinzufügen des skalaren Terms $\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}T(X(\sigma))$ zur klassischen Wirkung S_{p0}.

Wir wollen im folgenden jedoch das Tachyon außer Acht lassen und nur die masselosen Moden (Dilaton, Graviton und Axion) betrachten. Auch hier zeigt es sich, daß wie beim Tachyonfeld das natürliche Hinzufügen von

[2] Die Polyakov-Wirkung ist invariant unter Worldsheet-Diffeomorphismen und unter Weyl-Transformationen der Worldsheet-Metrik. Beides sind Eichsymmetrien der Wirkung. Die Eichfixierung und dabei entstehende Faddeev-Popov-Determinante werden in Abschnitt 2.5 auf Seite 24 erläutert. ♣

Diffeomorphismen-invarianten Termen zur klassischen Wirkung gerade zu einem erzeugenden Funktional für die Greensfunktionen in Baumgraphen-Näherung für die entsprechenden Stringmoden darstellt. So ist

$$S^{(0)}_{eff}[G,B,\Phi] = \int \mathrm{D}X\,\Delta_{FP} e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\left(g^{ab}\partial_a X^\mu G_{\mu\nu}(X)\partial_b X^\nu - i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X)+\alpha'\Phi(X)R_g\right)} \qquad (\mathbf{1}.35)$$

(im selben Sinne wie oben $S^{(0)}_{eff}[T]$) erzeugendes Funktional für die Streuamplituden in Baumgraphen-Ordnung der Graviton-, Axion- und Dilaton-Stringmoden. Setzt man die Hintergrundfelder nach der Variation gleich 0 (bzw. die Raumzeitmetrik $G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) so erhält man die Streuamplituden bezüglich des "naiven" Vakuums. Das muß aber nicht das wahre Vakuum sein. Das wahre Vakuum ist vielmehr jenes, welches $S^{(0)}_{eff}$ minimiert. So wie wir in Abschnitt 1.1 aus der Forderung $\frac{\delta}{\delta\phi}\,\Gamma[\varphi]|_{\varphi=-\bar\phi} = 0$ die Feldgleichungen für das Hintergrundfeld $\bar\phi$ bekommen, so erhalten wir hier aus der Forderung

$$\frac{\delta S^{(0)}_{eff}[\Phi]}{\delta\Phi(X)} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (\mathbf{1}.36)$$

(wobei hier Φ stellvertretend für alle drei Hintergrundfelder steht) Bewegungsgleichungen für Φ. Der Exponent von (**1**.35) wird oft als **verallgemeinerte Polyakov-Wirkung** bezeichnet und entspricht der klassischen Wirkung eines Strings, der durch die gekrümmte Raumzeit unter Anwesenheit von zwei weiteren Hintergrundfeldern propagiert:[3]

$$\boxed{S_p[X,g] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\left\{g^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) - i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha'\Phi(X)R_g\right\}} \qquad (\mathbf{1}.37)$$

Die effektive Wirkung S_{eff} ist dann nichts anderes als die Partitionsfunktion für diese klassische Wirkung, gesehen als Funktional der Hintergrundfelder.

1.3 Effektive Wirkung aus Forderung nach Weyl-Invarianz

Zu Beginn der Arbeit (ab Kapitel 2 auf Seite 15) werden wir unser Hauptaugenmerk auf eine zunächst völlig verschiedene effektive Wirkung richten.
Gehen wir dieses Mal direkt von der durch allgemeine Raumzeit-Hintergrundfelder $G_{\mu\nu}$ (Raumzeitmetrik), $B_{\mu\nu}$ (antisymmetrisches Rang-2-Tensorfeld: Axion) und Φ (Skalarfeld: Dilaton) erweiterten euklidischen Polyakov-Wirkung (**1**.37) aus. Wir haben am Ende des letzten Abschnitts bereits erwähnt, daß diese Wirkung auch ohne die Interpretation bezüglich des erzeugenden Funktionals ihre Berechtigung als klassiche Wirkung hat.

Die klassische Wirkung S_{p0} ohne Hintergrundfelder (**1**.30) ist Weyl-invariant, also invariant unter der **Weyl-Transformation** (lokale Skalierung) der Worldsheet-Metrik[4]

$$g_{ab}(\sigma) \;\to\; e^{2\omega(\sigma)}g_{ab}(\sigma) \qquad (\mathbf{1}.38)$$

$$\frac{\delta S_{p0}[X,e^{2\omega}g]}{\delta\omega(\sigma)} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (\mathbf{1}.39)$$

Auch wenn man die Raumzeit-Metrik und das Axionfeld hinzufügt, bleibt die Wirkung Weyl-invariant. Der Term mit dem Dilatonfeld hingegen ist nicht Weyl-invariant. In (**1**.37) hat man bereits berücksichtigt, daß die Quantisierung

[3]Das Integral über den B-Term in (**1**.37) kann man übrigens auch als Integral über eine 2-Form betrachten

$$-i\int\left(\sqrt{g}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X)\right)\mathrm{d}\sigma^a\wedge\mathrm{d}\sigma^b$$

Der Vorfaktor $-i$ vor dem Axionterm wird in Abschnitt A.2, Seite 74 erläutert. ♣

[4]Die Form der Weyl-Transformation in (**1**.38) ist einfach Konvention. Mit der exponentiellen Schreibweise stellt man sicher, daß nur positive Skalierungen erlaubt sind, also die Metrik positiv definit bleibt. Den Faktor zwei im Exponenten könnte man evtl. dadurch motivieren, daß ein Diffeomorphismus der σ sakaliert zu $e^\lambda\sigma$ (λ konstant) gerade eine Skalierung der Metrik nach $e^{-2\lambda}g_{ab}$ zur Folge haben würde, auch wenn dann ein anderes Vorzeichen im Exponenten steht. Das wäre aber wirklich nur Motivation, denn bei der Weyl-Transformation werden die Koordinaten nicht transformiert. Bei vielen Gelegenheiten kürzt der Faktor 2 auch irgendwo ein 1/2 weg und das ist immer praktisch. ♣

einer Weyl-invarianten klassischen Theorie (ohne Dilaton-Term) zu einer Weyl-Anomalie führt. Deshalb kann man bei der Quantisierung noch diesen nicht Weyl-invarianten Term zur Wirkung hinzufügen, der bereits erster Ordnung in α' ist und so dazu dienen kann, Anomalieterme zu kompensieren.

Da die Weyl-Invarianz eine Eichsymmetrie ist, würde eine Anomalie zu einer inkonsistenten Quantentheorie führen. Deshalb fordert man auch für die quantisierte Theorie Weyl-Invarianz. Kann man die Feldgleichungen, die sich für die Hintergrundfelder aus dieser Weyl-Invarianz-Forderung ergeben, auch durch Variation einer Raumzeit-Wirkung nach den Feldern erzeugen, so bezeichnet man diese als die **effektive Wirkung**.

Hat man triviale Hintergrundfelder ($G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu} = 0$, $\Phi = 0$), so ist die Forderung nach Weyl-Invarianz äquivalent zur Forderung

$$D \stackrel{!}{=} 26 \tag{1.40}$$

wobei D die Raumzeitdimension ist. Für allgemeine Hintergrundfelder ergeben sich nichttriviale Feldgleichungen für diese. Im Niederenergie-Limes (also in Baumgraphen-Ordnung und in 0ter Ordnung α') ist eine dieser Feldgleichungen gerade die Einsteinsche Feldgleichung für die Raumzeitmetrik im Vakuum (Wenn $\Phi = 0$, $B_{\mu\nu} = 0$). Explizit haben die Niederenergie-Feldgleichungen die folgende Form (siehe z.B. [Pol, S.111] oder [CT, S.830,836])

$$R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\omega} H_\nu^{\ \lambda\omega} + O(\alpha') \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.41}$$

$$-\frac{1}{2}\nabla^\omega H_{\omega\mu\nu} + \nabla^\omega \Phi H_{\omega\mu\nu} + O(\alpha') \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.42}$$

$$\frac{D-26}{6} - \frac{\alpha'}{2}\nabla^2\Phi + \alpha'\nabla_\omega\Phi\nabla^\omega\Phi - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + O(\alpha'^2) \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.43}$$

Die letzte Gleichung ist bereits höherer Ordnung in α' aber in den Ableitungen der Felder von selber Ordnung. Wir werden später (in Kapitel 2) diese Gleichungen bis zur Ordnung α'^0 reproduzieren. Die obigen Feldgleichungen kann man nun in diesem Niederenergielimes erzeugen durch Variation eben einer *effektiven Raumzeit-Wirkung*. Auch diese findet man z.B. in [Pol, S.114] und in [CT, S.839]. Sie lautet

$$S_{eff}[G,B,\Phi] = \frac{1}{2\kappa_0^2}\int d^D X \sqrt{G} e^{-2\Phi}\left[-\frac{2(D-26)}{3\alpha'} + R - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + O(\alpha')\right] \tag{1.44}$$

wobei κ_0 eine Normierungskonstante ist, und H die Feldstärke des B-Feldes (siehe Kapitel 2). Fradkin und Tseytlin haben diese Niederenergie-effektive-Wirkung in [FT85a, FT85c] jedoch auch als Niederenergie-Limes ihrer effektiven Wirkung (**1**.35) erhalten. Es gibt gute Gründe anzunehmen, daß die effektive Wirkung (**1**.35) auch im Allgemeinen mit der effektiven Wirkung aus der Weyl-Invarianz-Forderung übereinstimmt. Dies wird allerdings z.B. von Callan, Klebanov und Perry [CKP86, S.89] skeptisch beurteilt. Wir werden dennoch für den Rest dieser Arbeit von der Wahrheit dieser Annahme ausgehen.

Verschwindende Spur des Energie-Impuls-Tensors

Zur Gewinnung der effektiven Feldgleichungen in bestimmter Ordnung in α' aus der Forderung nach Weyl-Invarianz geht man oft einen Weg über den Energie-Impuls-Tensor. In der klassischen Theorie ist er von der Form

$$T^{ab}(\sigma) \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g(\sigma)}}\frac{\delta S}{\delta g_{ab}(\sigma)} \tag{1.45}$$

Eine Forderung nach Weyl-Invarianz ist nämlich äquivalent zu der Forderung einer verschwindenden Spur des Energie-Impuls-Tensors

$$\frac{\delta}{\delta\omega(\sigma)} S[\underbrace{e^{2\omega}g}_{\tilde g}] = \int d^2\tilde\sigma \underbrace{\frac{\delta\left(e^{2\omega(\tilde\sigma)}g_{ab}(\tilde\sigma)\right)}{\delta\omega(\sigma)}}_{2\tilde g_{ab}\delta^{(2)}(\sigma-\tilde\sigma)} \left.\frac{\delta S[\tilde g]}{\delta\tilde g_{ab}(\tilde\sigma)}\right|_{\tilde g_{ab}=e^{2\omega}g_{ab}} = 2\tilde g_{ab}\frac{\delta S[\tilde g]}{\delta \tilde g_{ab}} \propto T^a_{\ a} \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.46}$$

In der quantisierten Theorie spielt der Erwartungswert des quantisierten Energie-Impuls-Tensors eine ähnliche Rolle. Betrachten wir dazu wieder wie in (**1**.31) die eichfixierte Partitionsfunktion (genaueres dazu in Abschnitt 2.5 auf

Seite 24)

$$Z[g] = \int \mathrm{D}X \, \Delta_{FP}[g] e^{-S_p[X,g]} = \int \mathrm{D}X \mathrm{D}c \mathrm{D}b \cdot e^{-\overbrace{(S_p[X,g] + S_G[c,b,g])}^{S[X,c,b,g]}} \tag{1.47}$$

wobei c und b antikommutierende Geistfelder und S_G die Geistwirkung sei, auf deren Form wir hier nicht näher eingehen wollen. Sie stellt einfach eine mathematische Möglichkeit dar, die Faddeev-Popov-Determinante Δ_{FP} durch ein Integral auszudrücken (siehe (**C**.23), Seite 81). Die Forderung der Weyl-Invarianz der quantisierten Theorie führt dann zu

$$\frac{\delta}{\delta\omega(\sigma)} Z[\tilde{g}] \quad = \quad - \int \mathrm{D}X \mathrm{D}c \mathrm{D}b \frac{\delta S[\tilde{g}]}{\delta\omega(\sigma)} \cdot e^{-S[X,c,b,g]} \propto < T^a_a > \tag{1.48}$$

wobei der Energie-Impuls-Tensor T^{ab} hier jedoch aus Variation der klassischen und der Geistwirkung kommt, also nicht vollständig übereinstimmt mit dem Energie-Impuls-Tensor von oben.

Fordert man nun das Verschwinden von $< T^a_a >$ und verwendet einige allgemeine Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors, so führt das zu den oben erwähnten Feldgleichungen in entsprechender Ordnung für die Hintergrundfelder. Diesen Weg verwenden z.B. Polchinski und Callan in [Pol, CT]. In Kapitel 2 werden wir einen etwas anderen Weg verfolgen, der zwar naheliegend und auch von den verwendeten Techniken nicht ungewöhnlich ist, trotzdem in dieser Art bisher nicht verfolgt wurde.

1.4 Born-Infeld-Wirkung

Während man bei dem Ansatz der Weyl-Invarianz-Forderung zur Konstruktion der effektiven Wirkung immer den Umweg über Feldgleichungen gehen muß, aus denen man dann eine Wirkung rekonstruiert, hat man bei dem Ansatz von Fradkin und Tseytlin mit (**1**.35) einen Ausdruck für die effektive Wirkung gegeben, der im Prinzip bereits exakt in α' ist. Dennoch ist es auch dort im allgemeinen nicht möglich, einen geschlossenen Ausdruck für die effektive Wirkung in beliebiger Ordnung α' zu erhalten. Zumindest für den Fall eines an die Enden des offenen Strings koppelnden abelschen Eichfeldes A_μ (elektromagnetisches Feld) unter der Zusatzbedingung einer konstanten Feldstärke kann jedoch nach [FT85b] ein solcher geschlossener Ausdruck erreicht werden. Er stimmt überein mit der sogenannten Born-Infeld-Wirkung. Da sie Motivation für diese Arbeit war, wollen wir sie kurz näher betrachten und gehen dabei nach dem erwähnten Paper [FT85b] vor. Dieser Abschnitt wird der einzige sein, in dem wir mit offenen Strings arbeiten. Für den offenen String kommen zur verallgemeinerten Polyakov-Wirkung Randterme hinzu. Wir wollen nun alle Hintergrundfelder des geschlossenen Sektors "ausschalten" und allein das abelsche Eichfeld A_μ betrachten. Das euklidische erzeugende Funktional (und damit die effektive Wirkung) in Baumgraphen-Ordnung für die n-Punkt-Funktionen hat für das Eichfeld die Form

$$S^{(0)}_{eff}[A_\mu] = \int \mathrm{D}X \, \Delta_{FP} e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} - i \int_{\partial M} \mathrm{d}t \dot{X}^\mu A_\mu(X(t))} \tag{1.49}$$

Dabei sei

$$X(t) \equiv X(\gamma(t)) \tag{1.50}$$

wobei $\gamma(t)$ eine den Rand ∂M unserer Worldsheet-Mannigfaltigkeit M parametrisierende Kurve sein soll. Man teilt nun X auf in einen konstanten und einen nicht-konstanten Teil

$$X^\mu(\sigma) = Y^\mu + x^\mu(\sigma) \tag{1.51}$$

so daß $x^\mu(\sigma)$ Neumann-Randbedingungen erfüllt und sich die Integration in (**1**.49) aufteilt in eine normale Integration über die Raumzeit und ein Pfadintegral über x:

$$S^{(0)}_{eff}[A_\mu] = \int \mathrm{d}^D Y \, \Delta_{FP} \int \mathrm{D}x e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \eta_{\mu\nu} - i \int_{\partial M} \mathrm{d}t \dot{x}^\mu A_\mu(Y + x(t))} \tag{1.52}$$

A_μ entwickelt man dann um das konstante Y wodurch das entsprechende Integral im Exponenten unter Verwendung der Feldstärke $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ folgende Form annimmt

$$\int_{\partial M} \mathrm{d}t \dot{x}^\mu A_\mu(Y + x(t)) = \frac{1}{2} F_{\nu\mu}(y) \int \mathrm{d}t \dot{\xi}^\mu \xi^\nu + \frac{1}{3} \partial_\lambda F_{\nu\mu}(y) \int \mathrm{d}t \dot{\xi}^\mu \xi^\nu \xi^\lambda + \dots \tag{1.53}$$

Die entscheidende Annahme oder Forderung für die restliche Rechnung ist dann, daß die Feldstärke konstant ist

$$\partial_\lambda F_{\nu\mu} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (\mathbf{1}.54)$$

Das entstehende Pfadintegral ist im Prinzip dann ein Gaußsches. Da jedoch das entscheidende Integral im Exponenten nicht über Mannigfaltigkeit, sondern über den Rand der Mannigfaltigkeit geht, führt man eine Identität in das Integral ein, die einem einen Wechsel im Pfadintegral zu einer Integration über auf ∂M definierten Funktionen ermöglicht, so daß man tatsächlich ein Gauß-Integral erhält. Das Einfügen der Identität ähnelt dem Vorgehen bei der Faddeev-Popov-Methode in Abschnitt 2.5 auf Seite 24. Man erhält auf diese Weise bis zur ein-Schleifen-Ordnung einen geschlossenen Ausdruck. Für Baumgraphen-Ordnung (Worldsheet mit der Topologie einer Sphäre) wird die effektive Wirkung zur sogenannten **Born-Infeld-Wirkung**

$$S^{(0)}_{eff}[A] = Z_0 g_0^{-2} \alpha'^{-D/2} \int \mathrm{D}^D \sqrt{\det(\delta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})}$$

Diese Wirkung war ursprünglich bereits 1934 von M. Born und L. Infeld in [BI34] als eine mögliche Modifizierung des Elektromagnetismus vorgeschlagen worden.

In Kapitel 4 werden wir uns später mit der Frage beschäftigen, ob man auch für die Hintergrundfelder des geschlossenen Strings, unter bestimmten Nebenbedingungen an diese, einen geschlossenen Ausdruck für die exakte effektive Wirkung in Baumgraphen-Ordnung finden kann.

Kapitel 2

Feldgleichungen in niedrigster Ordnung α'

Betrachten wir nun den geschlossenen bosonischen String, der in einem allgemeiner Raumzeitmetrik unter Anwesenheit eines Axion- und eines Dilaton- Hintergrundfeldes propagiert, gehen also aus von der erweiterten euklidischen Polyakov-Wirkung (**1**.37=**A**.93)

$$S_p[X,g] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left\{ g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) - i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha' \Phi(X) R_g \right\} \tag{2.1}$$

Es sei noch einmal daran erinnert daß

$$\varepsilon^{ab} \equiv \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}} \tag{2.2}$$

der antisymmetrische ε-(Pseudo)-Tensor ist, mit

$$\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1, \quad \epsilon^{22} = \epsilon^{11} = 0 \tag{2.3}$$

Auch das Rang-2-Raumzeit-Tensorfeld (Axionfeld) $B_{\mu\nu}$ ist antisymmetrisch

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu} \tag{2.4}$$

Definieren wir noch die **Axion-Feldstärke**

$$H_{\omega\mu\nu} \equiv \partial_\omega B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\omega} + \partial_\nu B_{\omega\mu} = 3\partial_{[\omega}B_{\mu\nu]} = 3\nabla_{[\omega}B_{\mu\nu]} \tag{2.5}$$

Wir wollen nun aus der Forderung nach Weyl-Invarianz für die quantisierte Theorie die Feldgleichungen für die Hintergrundfelder in niedrigster Ordnung in α' herleiten. Betrachte dazu die eichfixierte Partitionsfunktion der Pfadintgralquantisierung. Auf die Eichfixierung und das genaue Aussehen der Partitionsfunktion werden wir noch in Abschnitt 2.5 auf Seite 24 zu sprechen kommen.

$$Z[g] = \int \mathrm{D}X\, \Delta_{FP}[g] e^{-S_p[X,g]} = \tag{2.6}$$

$$= \int \mathrm{D}X\,\mathrm{D}c\,\mathrm{D}b \cdot e^{-\overbrace{(S_p[X,g] + S_G[c,b,g])}^{S[X,c,b,g]}} \tag{2.7}$$

(S_G steht für Geistwirkung). Wir werden hauptsächlich von der ersten Form Gebrauch machen. Die Forderung der Weylinvarianz für die quantisierte Theorie stellt sich nun folgendermaßen dar:

$$Z[e^{2\omega(\sigma)}g] \stackrel{!}{=} Z[g] \quad \text{fuer beliebige Funktionen } \omega(\sigma) \tag{2.8}$$

Da die Weyl-Transformationen eine Lie-Gruppe darstellen, reicht es aus, infinitesimale Transformationen zu betrachten. Der Einfachheit halber führen wir noch einen σ-unabhängigen Parameter λ ein und fordern

$$\frac{d}{d\lambda} Z[e^{2\omega(\sigma)\lambda}g]\Big|_{\lambda=0} \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.9}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\lambda} \ln Z[e^{2\omega(\sigma)\lambda}g]\Big|_{\lambda=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für beliebige Funktionen } \omega(\sigma) \tag{2.10}$$

Oder nach Einsetzen von (**2**.6)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Z[e^{2\omega(\sigma)\lambda}g]\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\Delta_{FP}[e^{2\omega\lambda}g] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\int \mathrm{D}X\, e^{-S_p[X,e^{2\omega\lambda}g]}\bigg|_{\lambda=0} \stackrel{!}{=} 0} \quad (\mathbf{2}.11)$$

2.1 Entwicklung der Wirkung, Fluktuationsoperator O

Zur Berechnung des Pfadintegrals machen wir eine Entwicklung von S um die Lösung $\bar{X}$ der klassischen Bewegungsgleichungen. Sei also

$$X^\mu = \bar{X}^\mu + x^\mu \quad (\mathbf{2}.12)$$

In Abschnitt 2.2, insbesondere in Fußnote 6 wird begründet, warum höhere Ordnungen in x auch höheren Ordnungen in α' entsprechen. Die Entwicklung um $\bar{X}$ hat zur Folge, daß die linearen Terme wegfallen ($\delta S(\bar{X}) = 0$), und man in (**2**.6) in quadratischer Näherung ein Gaußintegral erhält. Dieses Verfahren ist auch als **Sattelpunktnäherung** bekannt.

$$X^\mu = \bar{X}^\mu + x^\mu \quad (\mathbf{2}.13)$$

$\bar{X}$ erfüllt wie gesagt die **klassischen Bewegungsgleichungen** (die sich aus Variation von S_p nach X ergeben, siehe (**B**.7) im Anhang):

$$2G_{\alpha\lambda}\left(\Box_g\bar{X}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_c\bar{X}^\mu\partial^c\bar{X}^\nu\right) + i\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\mu\partial_b\bar{X}^\nu H_{\mu\nu\lambda} - \alpha'\Phi_{,\lambda}R_g = 0 \quad (\mathbf{B}.7{=}\mathbf{2}.14)$$

Die Hintergrundfelder, die hier ohne Argumente notiert wurden, seien in Gleichungen, in denen $\bar{X}$ vorkommt, stets bei $\bar{X}$ auszuwerten. Man hat also

$$S_p[X] = S_p[\bar{X}] + \int \mathrm{d}^2\sigma\, \underbrace{\frac{\delta S[X]}{\delta X^\mu(\sigma)}\bigg|_{X=\bar{X}}}_{=0} x^\mu(\sigma) + \frac{1}{2}\int\int \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\sigma' x^\mu(\sigma)\, \frac{\delta^2 S[X]}{\delta X^\mu(\sigma)\delta X^\nu(\sigma')}\bigg|_{X=\bar{X}} x^\nu(\sigma') + \mathcal{O}(x^3) \quad (\mathbf{2}.15)$$

(Die Beiträge $\mathcal{O}(x^3)$ sind wie gesagt nach Abschnitt 2.2 von höherer Ordnung in α')
Die x^μ können als Quantenfluktuationen um die klassische Lösung betrachtet werden. Definiere noch[1]

$$S_1[X,y] \equiv \int \mathrm{d}^2\sigma \frac{\delta S[X]}{\delta X^\mu(\sigma)} y^\mu(\sigma) \quad (\mathbf{2}.16)$$

$$S_2[X,y,z] \equiv \int\int \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\sigma' y^\mu(\sigma)\frac{\delta^2 S[X]}{\delta X^\mu(\sigma)\delta X^\nu(\sigma')} z^\nu(\sigma') = \int \mathrm{d}^2\sigma \frac{\delta S_1[X.y]}{\delta X^\nu(\sigma)} z^\nu \quad (\mathbf{2}.17)$$

Damit gelten folgende Relationen

$$S[X] = S[\bar{X}] + \underbrace{S_1[\bar{X},x]}_{=0} + \frac{1}{2}S_2[\bar{X},x,x] + \mathcal{O}(x^3) \quad (\mathbf{2}.18)$$

$$S_1[X,\delta X] = \delta_X S[X] \text{ (wird nicht verwendet)} \quad (\mathbf{2}.19)$$

$$S_2[X,y,\delta X] = \delta_X S_1[X,y] \quad (\mathbf{2}.20)$$

Aus dem Anhang (Gleichung(**B**.5)) wissen wir, daß

$$\frac{\delta S[X]}{\delta X^\lambda(\sigma)} = \frac{\sqrt{g}}{4\pi\alpha'}\left\{-2G_{\mu\lambda}\Box_g X^\mu - 2\partial_c X^\nu\partial^c X^\mu G_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu H_{\mu\nu\lambda} + \alpha'\Phi_{,\lambda}R_g\right\} \quad (\mathbf{B}.5{=}\mathbf{2}.21)$$

[1] Die folgenden Bezeichnungen und der Weg zur Berechnung des quadratischen Entwicklungsterms der Wirkung sind eventuell etwas ungewöhnlich. Alternativ kann man auch der Definition der Funktionalableitung folgen und die zweite Funktionalableitung von S berechnen. Das wird aber ein bißchen länger und unübersichtlicher. Eine weitere Methode ist, überall in S Xdurch $\bar{X} + x$ zu ersetzen, die einzelnen Felder in x entwickeln, und nur die Terme $O(x^2)$ betrachten. Auch hier wird die Rechnung etwas länger, da man sich unterwegs abseits jeglicher Kovarianz befindet und am Ende dorthin zurückfinden muss... ♣

also

$$2\pi\alpha' S_1[X,x] = \int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}G_{\mu\lambda}\left(-\left(\Box_g X^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\partial_a X^\alpha \partial^a X^\beta\right) - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta H^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\lambda}R_g\right)x^\mu \qquad (\mathbf{2}.22)$$

Um S_2 zu finden, müssen wir nach (**2**.20) nur S_1 nach dem ersten Argument variieren. Dabei werten wir noch während der Rechnung bei $\bar{X}$, der Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen aus. (Die Hintergrundfelder, die im folgenden alle ohne Argumente auftauchen, seien stets bei $\bar{X}$ auszuwerten):

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha' S_2[\bar{X},x,\delta X] &= 2\pi\alpha'\ \delta_X S_1[X,x]|_{X=\bar{X}} = & (\mathbf{2}.23)\\ &= \int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\left\{G_{\mu\lambda,\rho}\delta X^\rho \underbrace{(\ldots)}_{=0(\mathrm{eqm})} + G_{\mu\lambda}\delta(\ldots)\right\}x^\mu = & (\mathbf{2}.24)\\ &= \int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x_\lambda\left(-\left(\Box_g \delta X^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\rho}\delta X^\rho \partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta + 2\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\delta X^\beta\right) + \right.\\ &\quad \left. - \left(i\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\delta X^\beta H^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\beta,\rho}\delta X^\rho\right) + \frac{\alpha'}{2}\Phi_{,\rho}^{;\lambda}\delta X^\rho R_g\right) & (\mathbf{2}.25) \end{aligned}$$

Daraus kann man sofort die Form von $S_2[\bar{X},x,x]$ ablesen

$$\begin{aligned} S_2[\bar{X},x,x] &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x_\lambda\left(-\delta^\lambda_\rho\Box_g - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\rho}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta - 2\Gamma^\lambda_{\alpha\rho}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a + \right.\\ &\quad \left. -i\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\rho}\partial_b - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\beta,\rho} + \frac{\alpha'}{2}\Phi_{,\rho}^{;\lambda}R_g\right)x^\rho \equiv & (\mathbf{2}.26)\\ &\equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x_\lambda\breve{O}^\lambda_\rho x^\rho & (\mathbf{2}.27) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde definiert

$$\boxed{\breve{O}^\lambda_\rho \equiv -\delta^\lambda_\rho\Box_g - 2\left(\Gamma^\lambda_{\alpha\rho}\partial^b\bar{X}^\alpha + \tfrac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\rho}\right)\partial_b - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\rho}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta - \tfrac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\beta,\rho} + \tfrac{\alpha'}{2}\Phi_{,\rho}^{;\lambda}R_g} \qquad (\mathbf{2}.28)$$

Bezeichnen wir diesen Pseudo-Differentialoperator 2. Ordnung als **Fluktuationsoperator**. Wir wollen ihn noch ein wenig schöner schreiben (so daß er manifest kovariant unter den Symmetrien der Wirkung ist). Führe dazu folgende Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung ein (zur Kovarianz dieser Ableitung siehe Kapitel 3 auf Seite 31)

$$D^{b\lambda}_{\ \ \gamma} \equiv \delta^\lambda_\gamma\nabla^b + \underbrace{\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\partial^b\bar{X}^\alpha + \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\gamma}}_{\equiv A^{b\lambda}_{\ \ \gamma}} \qquad (\mathbf{2}.29)$$

Das Quadrat dieses Differentialoperators ist

$$\begin{aligned} D^{b\lambda}_{\ \ \gamma}D_{b\ \rho}^{\ \gamma} &= \left(\delta^\lambda_\gamma\nabla^b + A^{b\lambda}_{\ \ \gamma}\right)\left(\delta^\gamma_\rho\nabla_b + A_{b\ \rho}^{\ \gamma}\right) = & (\mathbf{2}.30)\\ &= \delta^\lambda_\rho\Box_g + 2A^{b\lambda}_{\ \ \rho}\nabla_b + \nabla_b A^{b\lambda}_{\ \ \rho} + \left(A^bA_b\right)^\lambda_{\ \rho} & (\mathbf{2}.31) \end{aligned}$$

Damit kann man den Fluktuationsoperator schreiben als

$$\begin{aligned} \breve{O}^\lambda_\rho &= -\left(D^2\right)^\lambda_{\ \rho} + \nabla_b A^{b\lambda}_{\ \ \rho} + \left(A^bA_b\right)^\lambda_{\ \rho} - \\ &\quad -\Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\rho}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\beta,\rho} + \frac{\alpha'}{2}\Phi_{,\rho}^{;\lambda}R_g & (\mathbf{2}.32) \end{aligned}$$

Betrachte nun die Terme einzeln

$$\begin{aligned} \left(A^bA_b\right)^\lambda_{\ \rho} &= \left(\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\partial^b\bar{X}^\alpha + \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\gamma}\right)\left(\Gamma^\gamma_{\beta\rho}\partial_b\bar{X}^\beta + \frac{i}{2}g_{bc}\varepsilon^{dc}\partial_d\bar{X}^\beta H^\gamma_{\beta\rho}\right) = & (\mathbf{2}.33)\\ &= \partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\beta\rho} + \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta\left(\Gamma^\gamma_{\beta\rho}H^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\rho}\right) - \\ &\quad -\frac{1}{4}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\rho} \quad \text{siehe Fußnote}^2 & (\mathbf{2}.34) \end{aligned}$$

und

$$\nabla_b A^{b\lambda}{}_\rho = \nabla_b \left(\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \partial^b \bar{X}^\alpha + \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\rho} \right) = \quad (\mathbf{2}.35)$$

$$= \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^\lambda_{\gamma\rho} \Box_g \bar{X}^\gamma + \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial_b \bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\rho,\beta} \quad (\mathbf{2}.36)$$

Hier kommen jetzt die klassischen Bewegungsgleichungen (**B**.8) wieder ins Spiel

$$\Box_g \bar{X}^\gamma = -\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta - \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial_b \bar{X}^\beta H^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\alpha'}{2} \Phi^{,\gamma} R_g \quad (\mathbf{B}.8{=}\mathbf{2}.37)$$

Wieder alles in (**2**.32) einfügen ergibt

$$\begin{aligned}
\breve{O}^\lambda_\rho &= -\left(D^2\right)^\lambda{}_\rho + \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^\lambda_{\gamma\rho} \left(-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\alpha - \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial_b \bar{X}^\beta H^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\alpha'}{2} \Phi^{,\gamma} R_g \right) + \\
&\quad + \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial_b \bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\rho,\beta} + \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\rho} + \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial_b \bar{X}^\beta \left(\Gamma^\gamma_{\beta\rho} H^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} H^\gamma_{\beta\rho} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{4} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\gamma} H^\gamma_{\beta\rho} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\rho} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta - \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial_b \bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\beta,\rho} + \frac{\alpha'}{2} \Phi_{;\rho}^{;\lambda} R_g = \quad (\mathbf{2}.38) \\
&= -\left(D^2\right)^\lambda{}_\rho + \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \underbrace{\left(\Gamma^\lambda_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\rho} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\rho} - \Gamma^\lambda_{\gamma\rho} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \right)}_{=R^\lambda{}_{\alpha\beta\rho} = -R^\lambda{}_{\alpha\rho\beta}} - \\
&\quad - \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial_b \bar{X}^\beta \underbrace{\left(H^\lambda_{\alpha\beta,\rho} - H^\lambda_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^\lambda_{\gamma\rho} H^\gamma_{\alpha\beta} + \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} H^\gamma_{\beta\rho} - \Gamma^\gamma_{\beta\rho} H^\lambda_{\alpha\gamma} \right)}_{\to H^\lambda{}_{\alpha\beta;\rho} - H^\lambda{}_{\alpha\rho;\beta} \quad \text{siehe Fußnote}^3} - \\
&\quad - \frac{1}{4} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\gamma} H^\gamma_{\beta\rho} + \frac{\alpha'}{2} \Phi^{,\lambda}{}_{;\rho} R_g \quad (\mathbf{2}.39)
\end{aligned}$$

also

$$\breve{O}^\lambda_\rho = -\left(D^2\right)^\lambda{}_\rho - \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \left(R^\lambda_{\alpha\rho\beta} + \frac{1}{4} H^\lambda_{\alpha\gamma} H^\gamma_{\beta\rho} \right) - \frac{i}{2} \varepsilon^{ab} \partial_a \bar{X}^\alpha \partial_b \bar{X}^\beta \left(H^\lambda_{\alpha\beta;\rho} - H^\lambda_{\alpha\rho;\beta} \right) + \frac{\alpha'}{2} \Phi^{,\lambda}{}_{;\rho} R_g \quad (\mathbf{2}.40)$$

Der Fluktuationsoperator $\breve{O}$ kommt in (**2**.27) nur als quadratische Form vor

$$S_2[\bar{X}, x, x] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} x_\lambda \breve{O}^\lambda_\rho x^\rho \quad (\mathbf{2}.27{=}\mathbf{2}.41)$$

Diese kann man immer auch durch einen symmetrischen Operator O ausdrücken. Symmetrisch in dem Sinne, daß

$$\int d^2\sigma \sqrt{g} x_\lambda O^\lambda_\rho y^\rho = \int d^2\sigma \sqrt{g} y_\lambda O^\lambda_\rho x^\rho \quad (\mathbf{2}.42)$$

[2] Zum letzten Term in der Gleichung (**2**.34):

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ab} g_{bc} \epsilon^{dc} &= -(\epsilon g \epsilon)^{ad} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{01} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= -\begin{pmatrix} g_{01} & g_{11} \\ -g_{00} & -g_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{01} \\ -g_{01} & g_{00} \end{pmatrix} = g \cdot g^{ad} \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

[3] In (**2**.39) verwenden wir (mit antisymmetrischem $A^{\alpha\beta}$)

$$\begin{aligned}
A^{\alpha\beta} \left(H^\lambda_{\alpha\beta;\rho} - H^\lambda_{\alpha\rho;\beta} \right) &= A^{\alpha\beta} \Big(H^\lambda_{\alpha\beta,\rho} - H^\lambda_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^\lambda_{\rho\gamma} H^\gamma_{\alpha\beta} \underbrace{- \Gamma^\gamma_{\rho\alpha} H^\lambda_{\gamma\beta}}_{\to -\Gamma^\gamma_{\rho\beta} H^\lambda_{\alpha\gamma}} - \Gamma^\gamma_{\rho\beta} H^\lambda_{\alpha\gamma} \underbrace{- \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} H^\gamma_{\alpha\rho}}_{\to +\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} H^\gamma_{\beta\rho}} + \underbrace{\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}}_{\to 0} H^\lambda_{\gamma\rho} + \Gamma^\gamma_{\beta\rho} H^\lambda_{\alpha\gamma} \Big) = \\
&= A^{\alpha\beta} \left(H^\lambda_{\alpha\beta,\rho} - H^\lambda_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^\lambda_{\rho\gamma} H^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\rho\beta} H^\lambda_{\alpha\gamma} + \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} H^\gamma_{\beta\rho} \right) \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Wir werden in Abschnitt 4.1.3 auf Seite 44 zeigen, daß D^2 in diesem Sinne symmetrisch ist. Um den symmetrischen Operator O zu erhalten, brauchen wir also nur in $\breve{O}$ die matrixwertige Inhomogenität zu symmetrisieren, was darauf hinausläuft, den antisymmetrischen (in λ und ρ) Term $H^\lambda_{\alpha\rho;\beta}$ wegzuschmeißen und $H^\lambda_{\alpha\beta;\rho}$ zu symmetrisieren (alle anderen Terme sind bereits symmetrisch). In Zukunft beziehen wir uns mit dem Ausdruck "**Fluktuationsoperator**" immer auf den neuen symmetrischen Operator O. Fassen wir das Ergebnis für unseren Fluktuationsoperator noch einmal zusammen:

$$O^\lambda_\rho \;=\; -\left(D^2\right)^\lambda_\rho + C^\lambda_\rho \qquad (\mathbf{2}.43)$$

mit Inhomogenität

$$C^\lambda_\rho \;\equiv\; -\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta\left(R^\lambda_{\alpha\rho\beta}+\frac{1}{4}H^\lambda_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\rho}\right)-\frac{i}{4}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta\left(H^\lambda_{\alpha\beta;\rho}+H_{\rho\alpha\beta}{}^{;\lambda}\right)+\frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\lambda}{}_{;\rho}R_g \qquad (\mathbf{2}.44)$$

und kovariantem Differentialoperator

$$D_b{}^\lambda_\gamma \;\equiv\; \delta^\lambda_\gamma\nabla_b + A_b{}^\lambda_\gamma \qquad (\mathbf{2}.45)$$

wobei das dazugehörige nichtabelsche "Eichfeld" von folgender Form ist

$$A_b{}^\lambda_\gamma \;\equiv\; \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\partial_b\bar{X}^\alpha+\frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\partial^a\bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\gamma} \qquad (\mathbf{2}.46)$$

Damit wird ($\mathbf{2}$.27) also zu

$$S_2[\bar{X},x,x]=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x_\lambda O^\lambda_\rho x^\rho \qquad (\mathbf{2}.47)$$

Es ist kein Zufall, daß wir O mit einem Index oben und einem unten schreiben. Der Grund dafür wird später klar werden (siehe Fußnote 4 auf der nächsten Seite).
Wir kennzeichnen nun wieder die Abhängigkeit der Wirkung von der Metrik. Die Entwicklung der klassischen Wirkung ($\mathbf{2}$.18) nimmt also schließlich folgende Form an

$$\boxed{S[X,g]=S[\bar{X},g]+\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x_\lambda O^\lambda_\rho(g)x^\rho+S_{int}[x,g]} \qquad (\mathbf{2}.48)$$

wobei in der Wechselwirkungs-Wirkung S_{int} die höheren Terme in x enthalten sind

$$S_{int}[x,g]=\mathcal{O}(x^3) \qquad (\mathbf{2}.49)$$

2.2 Vernachlässigung der höheren Terme in α'

Zur Erinnerung: Wir wollen die aus der Weyl-Invarianz-Forderung ($\mathbf{2}$.11)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Z[e^{2\omega(\sigma)\lambda}g]\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\Delta_{FP}[e^{2\omega\lambda}g]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\int \mathrm{D}X\,e^{-S_p[X,e^{2\omega\lambda}g]}\bigg|_{\lambda=0}\stackrel{!}{=}0 \qquad (\mathbf{2}.11{=}\mathbf{2}.50)$$

resultierenden Feldgleichungen in niedrigster Ordnung in α' herleiten. Mit der Entwicklung ($\mathbf{2}$.48) der Wirkung, läßt sich das Pfadintegral berechnen, wenn man die höheren Terme vernachlässigt. Daß diese höheren Ordnungen $\mathcal{O}(x^3)$ aus $S_{int}[x]$ auch höheren Ordnungen in α' entsprechen, soll im folgenden gezeigt werden.

Um auch andere als Gaußsche Integrale (zumindest perturbativ) berechnen zu können, führen wir die Erzeugenden Funktionale ein (siehe auch ($\mathbf{1}$.1))

$$Z[g,j] \;\equiv\; \int \mathrm{d}X\,\Delta_{FP}[g]e^{-S_p[X,g]-\int \mathrm{d}^2\sigma j(\sigma)x(\sigma)} \qquad (\mathbf{2}.51)$$

$$Z_0[g,j] \;\equiv\; \int \mathrm{d}X\,\Delta_{FP}[g]e^{-S[\bar{X},g]-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x_\lambda O^\lambda_\rho(g)x^\rho-\int \mathrm{d}^2\sigma j(\sigma)x(\sigma)} \qquad (\mathbf{2}.52)$$

Für $Z_0[g]$ gilt nämlich

$$\int \mathrm{d}X\,\Delta_{FP}[g]x(\sigma)e^{-S_p[\bar{X},g]} = -\frac{\delta}{\delta j(\sigma)}Z_0[g,j]\Big|_{j=0} \tag{2.53}$$

$$\text{oder allgemeiner}\quad \int \mathrm{d}X\,\Delta_{FP}[g]F[x]e^{-S_p[\bar{X},g]} = F\left[-\frac{\delta}{\delta j}\right]Z_0[g,j]\Big|_{j=0} \tag{2.54}$$

und damit

$$Z[g] = Z[g,j]|_{j=0} = e^{-S_{int}\left[-\frac{\delta}{\delta j},g\right]}Z_0[g,j]\Big|_{j=0} = \tag{2.55}$$

$$= \Delta_{FP}[g]e^{-S_p[\bar{X},g]}\,e^{-S_{int}\left[-\frac{\delta}{\delta j},g\right]}\int \mathrm{d}x e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x_\lambda O^\lambda_{\ \rho}(g)x^\rho-\int \mathrm{d}^2\sigma j(\sigma)x(\sigma)}\Big|_{j=0} \tag{2.56}$$

Das Gaußsche Integral in der letzten Zeile kann man nach (**C**.15) dann durch die Funktionaldeterminante von O ausdrücken[4,5] und erhält so

$$Z[g,j] \propto \Delta_{FP}[g]e^{-S_p[\bar{X},g]}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,O}}e^{-S_{int}\left[-\frac{\delta}{\delta j},g\right]}e^{\pi\alpha'\int \mathrm{d}^2\sigma j_\mu(\sigma)\left(O^{-1}\right)^\mu_{\ \nu}j^\nu(\sigma)} \tag{2.57}$$

Wir haben unberücksichtigt gelassen, daß wir eigentlich wie in (**C**.15), die Determinante Det$'$ mit Unterdrückung der Nullmoden hätten verwenden müssen. Macht man sich jedoch klar, daß sich die Anzahl der Nullmoden eines positiv semidefiniten Operators nicht ändert, wenn man ihn lokal positiv skaliert, dann wird deutlich, daß die Variation der wie im Anhang in (**D**.55) auf Seite 87 regularisierten Determinante Det$'$ keinen Unterschied bringt zur Variation von Det.

S_{int} ist von der Ordnung $\mathcal{O}(x^3)$, also

$$S_{int}\left[-\frac{\delta}{\delta j},g\right]f[j] = \int \mathrm{d}^2\sigma_1\int \mathrm{d}^2\sigma_2\int \mathrm{d}^2\sigma_2 A(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\left(-\frac{\delta}{\delta j(\sigma_1)}\right)\left(-\frac{\delta}{\delta j(\sigma_1)}\right)\left(-\frac{\delta}{\delta j(\sigma_1)}\right)+\mathcal{O}\left(\left(-\frac{\delta}{\delta j}\right)^4\right) \tag{2.58}$$

$$e^{-S_{int}\left[-\frac{\delta}{\delta j},g\right]} = 1+\int A(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)^3+\mathcal{O}\left(\left(-\frac{\delta}{\delta j}\right)^4\right) \tag{2.59}$$

nach Fußnote[6] sind aber alle durch $\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)^k$ generierten Terme von höherer Ordnung in α'

$$\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)^k e^{\pi\alpha'\int \mathrm{d}^2\sigma j_\mu(\sigma)\left(O^{-1}\right)^\mu_{\ \nu}j^\nu(\sigma)} = \mathcal{O}\left(\alpha'^2\right)\quad \forall k\geq 3 \tag{2.60}$$

[4] Man könnte (**2**.47) auf der vorherigen Seite auch schreiben als $S_2[\bar{X},x,x] = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x^\lambda O_{\lambda\rho}x^\rho$ und dann auf den Gedanken kommen, bei der Berechnung der Funktionaldeterminante den Operator $O_{\lambda\rho}$ statt $O^\lambda_{\ \rho}$ zu verwenden. Jedoch handelt es sich bei der Determinantenbildung im Prinzip um ein Eigenwertproblem (Produkt der Eigenwerte), und nur bei dem Operator $O^\lambda_{\ \rho}$, der kontravariante Vektorfelder auf ebensolche abbildet, ist das Eigenwertproblem wohldefiniert. Desweiteren kommt in (**C**.15) das Skalarprodukt $(x,y)\equiv\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x^\mu G_{\mu\nu}(\bar{X})y^\nu$ vor. Wenn wir also S_2 mit diesem Skalarprodukt schreiben wollen $S_2[\bar{X},x,x] = \frac{1}{2\pi\alpha'}(x,Ox) = \int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x^\lambda G_{\lambda\rho}(Ox)^\rho$ so folgt, daß O der Operator ist, der kontravariant auf kontravariant abbildet.
Diese Bemerkung mag vielleicht überflüssig erscheinen. Es führt jedoch zu großen Problemen, wenn man $O_{\lambda\rho}$ verwendet und dafür später den 1. Seeley-DeWitt-Koeffizienten nachschlagen will (siehe auf Seite 24, (**2**.96)), da der Operator $O_{\lambda\rho}$ nicht von der geforderten Form (**2**.94) mit (**2**.95) ist, sondern zusätzlich noch die $\bar{X}$- und damit σ- abhängige Raumzeitmetrik enthält. Außerdem machen Ausdrücke wie e^{-tO}, wie sie etwas später bei der ζ-Funktionsmethode vorkommen mit $O_{\lambda\rho}$ ebenfalls nicht viel Sinn, da die Matrixmultiplikationen dann nicht kovariant wären. ♣

[5] Es gibt wie bereits erwähnt noch eine weitere Ambiguität in der Schreibweise von $S_2[\bar{X},x,x] = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}x^\lambda O_{\lambda\rho}x^\rho$: Man kann zu O beliebige antisymmetrische (im Sinne von (**2**.42) auf Seite 18) Terme hinzuaddieren, ohne daß sich S_2 ändert. Die Formel (**C**.15) gilt nur für symmetrische Matrizen, oder anders gesagt, man erhält bei der Integration nur die Determinante des symmetrischen Anteils des Operators. Deshalb haben wir O von vornherein symmetrisch gewählt (die Symmetrie von D^2 zeigen wir später noch in Abschnitt 4.1.3 auf Seite 44). Übersieht man diesen wichtigen Punkt und rechnet mit einem nicht symmetrischen O, so kann man Monate lang vergeblich nach dem richtigen Ergebnis suchen ;-) ♣

[6] (Die folgende Fußnote wird, wenn am Ende kein Kleeblatt auftaucht, wahrscheinlich auf der nächsten Seite fortgesetzt, so LaTeX will) Betrachte die Wirkung von $\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)^k$ auf $e^{f[j]}$ mit

$$f[j] \equiv \pi\alpha'\int \mathrm{d}^2\sigma j_\mu\left(O^{-1}\right)^\mu_{\ \nu}j^\nu$$

Damit wird unser Erzeugendes Funktional zu

$$Z[g,j] \propto \Delta_{FP}[g] e^{-S_p[\bar{X},g]} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\, O}} \left(e^{\pi\alpha' \int \mathrm{d}^2\sigma j_\mu(\sigma) \left(O^{-1}\right)^\mu{}_\nu j^\nu(\sigma)} + \mathcal{O}\left(\alpha'^2\right)\right) \tag{2.61}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\ln Z[g,j] &= const. + \ln \Delta_{FP}[g] - S_p[\bar{X},g] - \frac{1}{2}\ln \mathrm{Det}\, O + \ln\left(1 + \pi\alpha' \int \mathrm{d}^2\sigma j_\mu \left(O^{-1}\right)^\mu{}_\nu j^\nu + \mathcal{O}\left(\alpha'^2\right)\right) && (2.62)\\
&= const. + \ln \Delta_{FP}[g] - S_p[\bar{X},g] - \frac{1}{2}\ln \mathrm{Det}\, O + \mathcal{O}(\alpha') && (2.63)
\end{aligned}$$

so daß wir schließlich für unsere Weyl-Invarianz-Forderung (**2**.11) in niedrigster Ordnung α' erhalten:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln Z[e^{2\omega\lambda}g]\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln \Delta_{FP}[e^{2\omega\lambda}g] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} S_p[\bar{X}, e^{2\omega\lambda}g] - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln \mathrm{Det}\, O(e^{2\omega\lambda}g)\bigg|_{\lambda=0} + \mathcal{O}(\alpha') \stackrel{!}{=} 0} \tag{2.64}$$

2.3 Variation des klassischen Dilatonterms unter Weyl-Trafo

Widmen wir uns zunächst dem einfachsten Term von (**2**.64), nämlich dem durch den Dilatonterm verursachten Bruch der Weyl-Invarianz der klassischen Wirkung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} S_p[\bar{X}, e^{2\omega\lambda}g] \stackrel{(\mathbf{2}.1)}{=} \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{g} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} R_{e^{2\omega\lambda}g} \Phi(\bar{X}) \tag{2.65}$$

für infinitesimales λ gilt nach (**E**.91)

$$\begin{aligned}
\delta R &= -2\omega\lambda R - 2\lambda \Box\omega && (2.66)\\
\text{bzw. } R_{e^{2\omega\lambda}g} &= e^{-2\omega\lambda}\left(R_g - 2\lambda\Box_g \omega\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) && (2.67)
\end{aligned}$$

also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} S_p[\bar{X}, e^{2\omega\lambda}g] = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int \mathrm{d}^2\sigma e^{2\omega\lambda} \sqrt{g} R_{e^{2\omega\lambda}g} \Phi(\bar{X}) = \tag{2.68}$$

$$\Rightarrow \quad f^{(k)}_{1\ldots k}[j] \equiv \frac{\delta^k}{\delta j(\sigma_1)\ldots\delta j(\sigma_k)} f[j] = \begin{cases} 0 & \forall k \geq 3 \\ \mathcal{O}(\alpha') & \forall k \leq 2 \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta j(\sigma_1)} e^{f[j]} &= f^{(1)}_1[j] e^{f[j]} = \mathcal{O}(\alpha')\\
\frac{\delta^2}{\delta j(\sigma_1)\delta j(\sigma_2)} e^{f[j]} &= \left(f^{(2)}_{12}[j] + \left(f^{(1)}_1[j]\right)\left(f^{(1)}_2[j]\right)\right) e^{f[j]} = \mathcal{O}(\alpha')\\
\frac{\delta^3}{\delta j(\sigma_1)\delta j(\sigma_2)\delta j(\sigma_3)} e^{f[j]} &= \left(\left(\underbrace{f^{(3)}_{123}[j]}_{0} + f^{(2)}_{12}[j] f^{(1)}_3[j]\right) + \left(f^{(2)}_{13}[j] f^{(1)}_2[j] + f^{(1)}_1[j] f^{(2)}_{23}[j] + \left(f^{(1)}_1[j]\right)\left(f^{(1)}_2[j]\right)\left(f^{(1)}_3(j)\right)\right)\right) e^{f[j]} =\\
&= \mathcal{O}\left(\alpha'^2\right)
\end{aligned}$$

Durch Induktion läßt sich zeigen, daß

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{\delta}{\delta j}\right)^{2k} e^{f[j]} &= \mathcal{O}(\alpha'^k)\\
\left(-\frac{\delta}{\delta j}\right)^{2k-1} e^{f[j]} &= \mathcal{O}(\alpha'^k) \quad ♣
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\,(R_g - 2\lambda\Box_g\omega)\,\Phi(\bar{X}) + \mathcal{O}(\lambda^2) = &(\mathbf{2}.69)\\
&= -\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\Box_g\omega\Phi(\bar{X}) + \mathcal{O}(\lambda) &(\mathbf{2}.70)\\
&\stackrel{p.I.}{=} -\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\omega\Box_g\Phi(\bar{X}) + \mathcal{O}(\lambda) &(\mathbf{2}.71)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\Box_g\Phi(\bar{X}) &= g^{ab}\nabla_b\left(\Phi_{,\alpha}(\bar{X})\partial_a\bar{X}^\alpha\right) = &(\mathbf{2}.72)\\
&= \Phi_{,\alpha\beta}(\bar{X})\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta + \Phi_{,\gamma}(\bar{X})\Box_g\bar{X}^\gamma &(\mathbf{2}.73)
\end{aligned}$$

Verwenden wir noch die klassichen Bewegungsgleichungen ($\mathbf{B}$.8)

$$\Box_g X^\gamma = -\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_c X^\alpha\partial^c X^\beta - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a X^\alpha\partial_b X^\beta H_{\alpha\beta}{}^\gamma + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\gamma}R_g \qquad (\mathbf{B}.8{=}\mathbf{2}.74)$$

so wird die Variation der Wirkung zu

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}S_p[\bar{X}, e^{2\omega\lambda}g] = &(\mathbf{2}.75)\\
&= -\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\omega\left(\Phi_{,\alpha\beta}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta + \Phi_{,\gamma}\left(-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial^c\bar{X}^\beta - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H_{\alpha\beta}{}^\gamma + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\gamma}R_g\right)\right) + \mathcal{O}(\lambda)
\end{aligned}$$

wobei alle Hintergrundfelder bei $\bar{X}$ auszuwerten seien. Schließlich ergänzen sich noch $\Phi_{,\alpha\beta}$ und $-\Phi_{,\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ zu einer Raumzeit-kovarianten Ableitung und man erhält

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}S_p[\bar{X}, e^{2\omega\lambda}g] = -\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\omega\left(\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta\Phi_{;\alpha\beta} - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi_{;\gamma} + \frac{\alpha'}{2}R_g\Phi_{;\gamma}\Phi^{;\gamma}\right) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (\mathbf{2}.76)}$$

Der letzte Term in der Klammer ist bereits von erster Ordnung in α' und wird in zukünftigen Rechnungen vernachlässigt werden.

2.4 Variation der Determinante des Fluktuationsoperators

Wir widmen uns nun $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\mathrm{Det}\,O(e^{2\omega\lambda}g)$, einem weiteren Term aus ($\mathbf{2}$.64). Für die Funktionaldeterminante verwenden wir die ζ-Funktions-Regularisierung (Anhang D, S.82)[7].

$$\ln\mathrm{Det}\,O \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_O(s)\Big|_{s=0} \qquad (\mathbf{D}.4{=}\mathbf{2}.77)$$

Als erstes werden wir die Transformation des Operators unter Weyl-Trafo untersuchen. Dazu betrachten wir die ursprüngliche Form ($\mathbf{2}$.28) unseres Fluktuationsoperators

$$\breve{O}^\lambda_\rho \equiv -\delta^\lambda_\rho\Box_g - 2\left(\Gamma^\lambda_{\alpha\rho}\partial^b\bar{X}^\alpha + \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\rho}\right)\partial_b - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\rho}g^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\beta,\rho} + \frac{\alpha'}{2}\Phi_{;\rho}^{;\lambda}R_g \qquad (\mathbf{2}.28{=}\mathbf{2}.78)$$

[7] Dort wird die Regularisierung der Determinante eines positiv definiten Operators betrachtet. Unser Fluktuationsoperator von Seite 19 ist für triviale Hintergrundfelder ($B_{\mu\nu} = \Phi = 0$, $G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) gleich dem Negativen des Laplace-Operators. Dieser ist negativ semidefinit und hat im Raum aller auf der Sphäre quadratintegrablen Funktionen nur eine Nullmode: Die konstanten Funktionen. Wir werden daher annehmen, daß unser Operator (mit kleinen Abweichungen vom trivialen Hintergrund) ebenfalls positiv semidefinit ist, auch wenn das nicht der Fall sein muß. Dieses Problem soll aber nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein. Auch werden eventuelle Nullmoden in folgender Rechnung ignoriert. Siehe dazu auf Seite 20. ♣

Folgende Größen transformieren sich

$$g_{ab} \quad \to \quad e^{2\omega\lambda} g_{ab} \tag{2.79}$$
$$g^{ab} \quad \to \quad e^{-2\omega\lambda} g^{ab} \tag{2.80}$$
$$\sqrt{g} \quad \to \quad e^{2\omega\lambda}\sqrt{g} \tag{2.81}$$
$$\varepsilon^{ab} = \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}} \quad \to \quad e^{-2\omega\lambda}\varepsilon^{ab} \tag{2.82}$$
$$\Box_g \quad \to \quad e^{-2\omega\lambda}\Box_g + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{2.83}$$
$$R_g \quad \overset{(\mathbf{E}.91)}{\to} \quad e^{-2\omega\lambda}R_g - 2\lambda\Box_g\omega + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{2.84}$$

Die einzige Größe, die auch für infinitesimales λ nicht auf einfache Art skaliert, ist R_g. Die einfache Skalierung vereinfacht die weiteren Rechnungen, wie wir bald sehen werden. Glücklicherweise ist besagter Term aber von höherer Ordnung in α', weshalb wir ihn im folgenden vernachlässigen. Die Skalierung (**2**.83) müssen wir noch zeigen. $\Box_g$ wirkt in (**2**.48) auf Worldsheet-Skalare x^μ. Entsprechend ist

$$\Box_g = g^{ab}\nabla_a\partial_b = g^{ab}\left(\partial_a\partial_b - \Gamma^c_{ab}\partial_b\right) \tag{2.85}$$

Die Variation ist dann

$$\delta\Box_g = \underbrace{\delta g^{ab}}_{=-2\omega\lambda g^{ab}}\left(\partial_a\partial_b - \Gamma^c_{ab}\partial_b\right) + g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab}\partial_b \tag{2.86}$$

wobei nach (**E**.83)

$$\delta\Gamma^c_{ab} = \lambda\left(\delta^c_a\omega_{,b} + \delta^c_b\omega_{,a} - g_{ab}\omega^{,c}\right) \tag{2.87}$$

Also ist

$$\delta\Box_g = -2\omega\lambda\Box_g + \lambda\left(2-d\right)\omega^{,c}\partial_b \tag{2.88}$$

wobei d die Dimension der Mannigfaltigkeit ist. Für $d=2$ folgt dann die Skalierung (**2**.83).

Setzt man nun alle oben genannten Skalierungen in den Operator ein (und vernachlässigt wie gesagt den Dilaton-Term, der bereits höherer Ordnung in α' ist), so erhält man eine lokale Skalierung der Form

$$\breve{O}^\lambda_\rho(e^{2\omega\lambda}g) = e^{-2\omega\lambda}\breve{O}^\lambda_\rho + \mathcal{O}(\lambda^2) + \mathcal{O}(\alpha') \tag{2.89}$$

Die Terme, durch die sich O von $\breve{O}$ unterscheidet, skalieren auf dieselbe Art. Es gilt also

$$\boxed{O^\lambda_\rho(e^{2\omega\lambda}g) = e^{-2\omega\lambda}O^\lambda_\rho + \mathcal{O}(\lambda^2) + \mathcal{O}(\alpha')} \tag{2.90}$$

Für Operatoren, die auf diese Art skalieren, werden wir in Abschnitt D.3.1 des Anhangs D herleiten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\mathrm{Det}\,\left(e^{-2\omega\lambda}O\right) = -2\int \mathrm{d}^2\sigma\,\omega\tilde{\zeta}_{e^{-2\omega\lambda}O}(\sigma,0) \tag{D.28=2.91}$$

wobei $\tilde{\zeta}$ definiert ist über

$$\zeta_O(s) \equiv \int \mathrm{d}^2\sigma\,\tilde{\zeta}_O(\sigma,s) \tag{D.23=2.92}$$

ζ an der Stelle 0 kann man durch den ersten Seeley-DeWitt-Koeffizienten ausdrücken (Herleitung siehe Abschnitt D.4 im Anhang D, Definition der Seeley-DeWitt-Koeffizienten siehe (**D**.10))

$$\zeta_O(0) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\,\mathrm{tr}\,a_1(\sigma,\sigma) \tag{D.49=2.93}$$

Diese Größe kann man aber in einigen Referenzen finden (z.B. [WW94, S.157],[BCVZ96, S.104]). Ist der Operator von der Form

$$O = -D^2 + C \tag{2.94}$$

mit

$$D_a = \nabla_a + A_a \tag{2.95}$$

also von der Form, auf die wir unseren Fluktuationsoperator in (**2**.43) wohlwissend gebracht haben, dann gilt

$$\int d^2\sigma \mathrm{tr}\, a_1 = \int d^2\sigma\sqrt{g}\mathrm{tr}\left[\delta^\lambda_\rho \frac{R_g}{6} - C^\lambda_\rho\right] = \int d^2\sigma\sqrt{g}\left[\frac{D}{6}R_g - C^\lambda_\lambda\right] \tag{2.96}$$

wobei D die Raumzeit-Dimension ist.

Setzen wir das alles wieder in (**D**.28=**2**.91) und berücksichtigen (**2**.90), so ergibt sich

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \ln \mathrm{Det}\,\left(O(e^{2\omega\lambda}g)\right) = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\omega\left[\frac{D}{6}R_g - C^\lambda_\lambda\right] + \mathcal{O}(\alpha') \tag{2.97}$$

Jetzt müssen wir nur noch C aus (**2**.44) einsetzten und erhalten schließlich

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda}\ln \mathrm{Det}\,O(e^{2\omega\lambda}g) = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\omega\left(\frac{D}{6}R_g + \partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta\left(R_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}H^\lambda_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\lambda}\right) + \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\beta;\lambda} + \mathcal{O}(\alpha')\right)} \tag{2.98}$$

2.5 Variation der Faddeev-Popov-Determinante

2.5.1 Eichfixierung und Faddeev-Popov-Determinante Δ_{FP}

Da wir von der quantisierten Theorie Weyl-Invarianz fordern (Diffeomorphismen-Invarianz sowieso), müssen wir aus der Partitionsfunktion das Volumen der Eichgruppe herausdividieren

$$Z = \frac{1}{V_{Diff\times Weyl}}\int DgDX\, e^{-\int S[X,g]} \tag{2.99}$$

Eich -Invarianz der Theorie ist gleichbedeutend mit der Eich-Invarianz des Integranden $DgDX e^{-\int S[X,g]}$. Die Weyl-Anomalie von DX haben wir bereits berechnet, sie steckt in $\mathrm{Det}\,O$. Die Weyl-Anomalie von Dg äußert sich nach Variablentransformation in der Weyl-Anomalie der sogenannten Faddeev-Popov-Determinante. Die Faddeev-Popov-Methode ist ein übliches Vorgehen in der Eichtheorie, um das Eichvolumen vom Pfadintegral absondern zu können. Um das Maß Dg zu definieren, brauchen wir eine Metrik auf dem Raum der Worldsheet-Metriken, bzw. eine Norm für die Variationen der Worldsheet-Metrik. Die allgemeinste lokale Norm auf diesen Variationen ist (siehe [Alv83, S.17] oder [Weib, S.23])

$$\|\,\delta g\,\| \equiv \int d^2\sigma\sqrt{g}\delta g_{ab}(\sigma)\left(G^{abcd} + ug^{ab}g^{cd}\right)\delta g_{cd}(\sigma) \tag{2.100}$$

wobei u eine beliebige positive reelle Zahl $u \in \mathbf{R}^+$ und G^{abcd} der Projektionsoperator auf dem Raum der symmetrischen spurlosen Tensoren ist

$$G_{ab}{}^{cd} \equiv \frac{1}{2}\left(\delta^c_a\delta^d_b + \delta^d_a\delta^c_b - g_{ab}g^{cd}\right) \tag{2.101}$$

(für symmetrische spurlose Tensoren ist er einfach die Identität $G_{ab}{}^{cd} \equiv \delta^c_a\delta^d_b$)
Die Form dieser Norm legt es nahe, die Worldsheet-Metrik g_{ab} in einen spurlosen und einen reinen Spur-Anteil zu zerlegen

$$g_{ab} \equiv g^{(T)}_{ab} + 2g_{ab}\tau(\sigma) \tag{2.102}$$

$$\text{mit } g^{ab}g^{(T)}_{ab} = 0 \tag{2.103}$$

und über $\delta g^{(T)}_{ab}$ und $\delta\tau$ zu integrieren. In zwei Dimensionen hat die Metrik drei unabhängige Komponenten, zwei davon trägt der spurlose Anteil und einen der reine Spuranteil. Ebenso viele Freiheitsgrade besitzen die Eich-Transformationen. Einen von der Weyl-Transformation (mit Parameter ω) und zwei durch Diffeomorphismen (mit

Parametern ξ^a)

$$\begin{aligned} \text{Weyl}: \quad g_{ab} &\to e^{2\omega(\sigma)} g_{ab} && (\mathbf{2}.104) \\ \text{infini. Diffeo}: \quad \sigma^a &\to \sigma^a + \xi^a(\sigma) && (\mathbf{2}.105) \\ g_{ab} &\to g_{ab} - \xi_{a;b} - \xi_{b;a} && (\mathbf{2}.106) \end{aligned}$$

Auf einem Worldsheet mit Topologie einer Sphäre sind somit sämtliche Metriken eichäquivalent, und wir können auch über die Gruppenparameter anstatt über die Metrik integrieren. Analog zur mathematischen Identität im Eindimensionalen

$$1 = \int \mathrm{d}x \delta(x - x_0) = \int \mathrm{d}y \left. \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \right|_{x=x_0} \delta(x - x_0) \qquad (\mathbf{2}.107)$$

gilt auch für Pfadintegrale

$$1 = \int_V \mathrm{D}\tilde{g} \delta\left(\tilde{g} - g\right) = \int_U \mathrm{D}(\omega, \xi) \mathrm{Det}' \left(\frac{\delta\left(\tilde{\tau}, \tilde{g}^{(T)}\right)}{\delta\left(\omega, \xi\right)} \right) \delta(\tilde{g} - g) \qquad (\mathbf{2}.108)$$

(Der Strich an der Determinante hat mit den Nullmoden zu tun und wird auf der nächsten Seite noch erklärt), wobei V eine offene Umgebung um g ist, U eine entsprechende Umgebung im Raum der Gruppenparameter und $\tilde{g}$ aus einer Konfidenzmetrik $\hat{g}$ (fiducial metric) durch eine allgemeine Eichtransformation mit Parametern ω und ξ hervorgehen soll

$$\hat{g} \overset{\omega,\xi}{\mapsto} \tilde{g}, \quad \left(\hat{\tau}, \hat{g}^{(T)}\right) \overset{\omega,\xi}{\mapsto} \left(\tilde{\tau}, \tilde{g}^{(T)}\right) \qquad (\mathbf{2}.109)$$

Die Jacobi-Determinante zum Wechsel von der Integration über die Metrik-Komponenten zur Integration über die Gruppenelemente nennt man **Faddeev-Poppov-Determinante**

$$\Delta_{FP}[\tilde{g}] \equiv \mathrm{Det}' \left(\frac{\delta\left(\tilde{\tau}, \tilde{g}^{(T)}\right)}{\delta\left(\omega, \xi\right)} \right) \qquad (\mathbf{2}.110)$$

Fügt man die Identität ($\mathbf{2}$.108) in ($\mathbf{2}$.99) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{V_{Diff \times Weyl}} \int \mathrm{D}g \int \mathrm{D}X \int \mathrm{D}(\omega, \xi) \Delta_{FP}[\tilde{g}] \delta(\tilde{g} - g) e^{-\int S[X, \tilde{g}]} = && (\mathbf{2}.111) \\ &= \frac{1}{V_{Diff \times Weyl}} \int \mathrm{D}X \int \mathrm{D}(\omega, \xi) \Delta_{FP}[\tilde{g}] e^{-\int S[X, \tilde{g}]} = && (\mathbf{2}.112) \\ (X \text{ umbenennen}) &= \frac{1}{V_{Diff \times Weyl}} \int \mathrm{D}(\omega, \xi) \int \mathrm{D}\tilde{X} \Delta_{FP}[\tilde{g}] e^{-\int S[\tilde{X}, \tilde{g}]} && (\mathbf{2}.113) \end{aligned}$$

Hier erkennt man jetzt, daß für eichinvariantes $\mathrm{D}(\omega, \xi)$ die oben geforderte Invarianz von $\mathrm{D}g\mathrm{D}Xe^{-\int S[X,g]}$ äquivalent ist zur Forderung der Invarianz von $\mathrm{D}X\Delta_{FP}[g]e^{-\int S[X,g]}$. Ist diese Invarianz erfüllt, so kann man alle Tilden in obiger Gleichung zu entfernen, und das Eichvolumen absondern, so daß es sich mit dem Vorfaktor kürzt. Die Partitionsfunktion wird dann zu

$$Z = \int \mathrm{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-\int S[X, \hat{g}]} \quad \text{für eichinvariante Theorie} \qquad (\mathbf{2}.114)$$

Solange die Invarianz aber noch nicht gewährleistet ist (für beliebige Hintergrundfelder oder unpassende Raumzeit-Dimensionen) ist das Integral in ($\mathbf{2}$.114) explizit abhängig von der Konfidenzmetrik. Dieses Integral definiert dann ein Funktional von der Metrik

$$Z[g] = \int \mathrm{D}X \Delta_{FP}[g] e^{-\int S[X, g]} \qquad (\mathbf{2}.115)$$

Anstatt die Weyl-Invarianz von $\mathrm{D}X\Delta_{FP}[\hat{g}]e^{-\int S[X,\hat{g}]}$ zu fordern, kann man also auch die Weyl-Invarianz von $Z[g]$ verlangen, und das ist genau das, womit wir begonnen haben.

Das eigentliche Ziel dieses Abschnitts ist es, die Variation der Faddeev-Popov-Determinante Δ_{FP} unter Weyl-Transformation zu berechnen. Nach Definition ist

$$\Delta_{FP}[\tilde{g}] \equiv \mathrm{Det}'\left(\frac{\delta\left(\tilde{\tau}, \tilde{g}^{(T)}\right)}{\delta(\omega, \xi)}\right)\Bigg|_{\omega,\xi=0} \qquad (\mathbf{2}.116)$$

Um die Jacobi-Matrix bei $\omega, \xi = 0$ zu erhalten, reicht es, Transformationen der Metrik unter einem infinitesimalen Diffeomorphismus $\sigma^a \to \sigma^a + \xi^a(\sigma)$ und einer infinitesimalen Weyl-Transformation $g_{ab} \to e^{2\omega(\sigma)} g_{ab}$ zu betrachten:

$$\delta g_{ab} = -\delta\xi_{a;b} - \delta\xi_{b;a} + 2\delta\omega g_{ab} = -\left(\delta_a^c \nabla_b + \delta_b^c \nabla_a - g_{ab}\nabla^c\right)\delta\xi_c + \left(2\delta\omega - \nabla^c\delta\xi_c\right) g_{ab} \qquad (\mathbf{2}.117)$$

Im zweiten Schritt haben wir die Variation getrennt in einen symmetrischen spurfreien Anteil und einen rein skalierenden (Spur-)Anteil. Man sieht dann, daß der spurfreie Anteil der Variation nur durch den Diffeomorphismus verursacht wird, während sich auf die Variation der Spur beide Transformationen auswirken. Es ist üblich, den Operator für den spurfreien Anteil mit P_1 zu bezeichnen[8]

$$P_{1\,ab}{}^c \equiv \left(\delta_a^c \nabla_b + \delta_b^c \nabla_a - g_{ab}\nabla^c\right) \qquad (\mathbf{2}.118)$$

P_1 bildet kovariante Vektoren auf symmetrische spurfreie Rang-2-Tensoren ab. Damit ist also mit ($\mathbf{2}$.102)

$$2\delta\tau = \left(2\delta\omega - \nabla^c\delta\xi_c\right) g_{ab} \qquad (\mathbf{2}.119)$$

$$\delta g_{ab}^{(T)} = P_{1\,ab}{}^c \delta\xi_c \qquad (\mathbf{2}.120)$$

Somit wird die Jacobi-Matrix zu

$$\frac{\delta\left(\tilde{\tau}, \tilde{g}^{(T)}\right)}{\delta(\omega, \xi)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & -P_1 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{2}.121)$$

mit Faddeev-Popov-Determinante

$$\Delta_{FP}[\tilde{g}] \equiv \mathrm{Det}'\left(\frac{\delta\left(\tilde{\tau}, \tilde{g}^{(T)}\right)}{\delta(\omega, \xi)}\right)\Bigg|_{\omega,\xi=0} = \mathrm{Det}'\begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Det}'(P_1) \qquad (\mathbf{2}.122)$$

Der Operator P_1 bildet von kovarianten Vektoren auf symmetrische spurlose Tensoren in zwei Dimensionen ab. Die Determinante als Produkt der Eigenwerte macht nur dann Sinn, wenn man einen kanonischen Isomorphismus zwischen den Abbildungsräumen hat, so daß man überhaupt von Eigenvektoren sprechen kann. Für gewöhnlich kann man die Determinante eines solchen Operators definieren über

$$\boxed{\mathrm{Det}'P_1 \equiv \sqrt{\mathrm{Det}'\left(P_1^\dagger P_1\right)} = \Delta_{FP}} \qquad (\mathbf{2}.123)$$

wobei der adjungierte Operator $P^\dagger$ definiert sei durch

$$\left(P_1^\dagger t, \xi\right) = \left(t, P_1\xi\right) \qquad (\mathbf{2}.124)$$

Dabei ist das erste Skalarprodukt dasjenige im Raum der kovarianten Vektoren ξ (siehe $\mathbf{2}$.131), während das zweite dasjenige im Raum der spurlosen symmetrischen Rang-2-Tensoren t ist (siehe $\mathbf{2}$.132).

Kommen wir nun noch auf den Strich an der Determinante zu sprechen. Er bedeutet, daß bei der Bildung der Determinante die **Nullmoden** ausgelassen werden sollen (genaueres wird beschrieben in Abschnitt D.5 des Anhangs, Seite 87). Der Grund ist, daß nicht über den gesamten Parameterraum der Eichparameter ω und ξ integriert werden darf, da beide Parameter sich auf die Spur auswirken können (siehe ($\mathbf{2}$.119)), und man so eventuell über manche Metriken doppelt integriert. Deswegen schließen wir die Vektorfelder $\xi_a(\sigma)$ aus, die sich auf die Spur auswirken, nicht aber auf den symmetrischen spurlosen Teil. Das sind aber gerade die ξ, die im Kern von P_1 liegen, also Eigenwert 0 haben. Im allgemeinen spielen die Nullmoden eine nicht unbedeutende Rolle. Wenn das zugrunde liegende Worldsheet jedoch die Topologie einer Sphäre hat, wirken sich die Nullmoden nicht auf die Variation der Determinante aus. Die genauen Zusammenhänge findet man in [Weib, Alv83].

[8] Der Grund für die Bezeichnung P_1 ist, daß man in einem allgemeinen Formalismus Operatoren P_n definiert, die von Rang-n-Tensoren auf Rang-$(n+1)$-Tensoren abbilden. P_1 ist dann ein spezieller Operator aus dieser allgemeinen Klasse. Siehe hierzu [Alv83, S.31] ♣

2.5.2 Berechnung von $P_1^\dagger P_1$

Da es uns nur um Variationen der Determinante unter Weyl-Transformationen geht, nutzen wir nun das Wissen, daß die quantisierte Theorie Diffeomorphismen-invariant ist (wegen Diffeo-invarianten Regularisierungen), können als Konfidenz-Metrik (fiducial metric) $\hat{g}$ also die Metrik in komplexen Koordinaten, ausgehend von konformer Eichung wählen:

$$\hat{g}_{ab} = \frac{e^{2\alpha(z)}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ab} \qquad a, b \in \{z, \bar{z}\} \tag{2.125}$$

(In Anhang E, Abschnitt E.2.3, S.90 sind einige Formeln für diese Eichung aufgelistet, von denen wir im folgenden regen Gebrauch machen werden. Obige Gleichung stammt von (**E**.39))

Damit werden die Komponenten von P_1 (**2**.118) zu

$$\begin{aligned} {P_1}_{zz}{}^{z} &= 2\nabla_z & (2.126)\\ {P_1}_{zz}{}^{\bar{z}} &= 0 = {P_1}_{\bar{z}\bar{z}}{}^{z} & (2.127)\\ {P_1}_{\bar{z}\bar{z}}{}^{\bar{z}} &= 2\nabla_{\bar{z}} & (2.128)\\ {P_1}_{z\bar{z}}{}^{z} &= 0 = {P_1}_{z\bar{z}}{}^{\bar{z}} & (2.129) \end{aligned}$$

oder

$$P_1\xi = \begin{pmatrix} 2\nabla_z\xi_z & 0 \\ 0 & 2\nabla_{\bar{z}}\xi_{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\partial_z - 2\alpha_{,z}\right)\xi_z & 0 \\ 0 & 2\left(\partial_{\bar{z}} - 2\alpha_{,\bar{z}}\right)\xi_{\bar{z}} \end{pmatrix} \tag{2.130}$$

Für die Vektoren haben wir als natürliches Skalarprodukt

$$(\xi, \xi') \equiv \int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\sqrt{g}\xi_a g^{ab}\xi'_b = \int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\left(\xi_{\bar{z}}\xi'_z + \xi_z\xi'_{\bar{z}}\right) \tag{2.131}$$

und für die symmetrischen spurlosen[9] Tensoren (siehe (**2**.100),(**2**.101))

$$(t, t') \equiv \int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\sqrt{g}\left(t_{ab}g^{ac}g^{bd}t'_{cd}\right) = 2\int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}e^{-2\alpha}\left(t_{zz}t'_{\bar{z}\bar{z}} + t_{\bar{z}\bar{z}}t'_{zz}\right) \tag{2.132}$$

Der adjungierte Operator $P_1^\dagger$ ist wie erwähnt definiert über

$$\begin{aligned} \left(P_1^\dagger t, \xi\right) &\equiv (t, P_1\xi) = 4\int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}e^{-2\alpha}\left(t_{zz}\left(\partial_{\bar{z}} - 2\alpha_{,\bar{z}}\right)\xi_{\bar{z}} + t_{\bar{z}\bar{z}}\left(\partial_z - 2\alpha_{,z}\right)\xi_z\right) = & (2.133)\\ &\overset{p.I.}{=} -4\int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}e^{-2\alpha}\left(\left(\partial_{\bar{z}} + 2\alpha_{,\bar{z}}\right)t_{zz}\cdot\xi_{\bar{z}} + \left(\partial_z + 2\alpha_{,z}\right)t_{\bar{z}\bar{z}}\cdot\xi_z\right) + \\ &\quad +8\int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}e^{-2\alpha}\left(\alpha_{,\bar{z}}t_{zz}\xi_{\bar{z}} + \alpha_{,z}t_{\bar{z}\bar{z}}\xi_z\right) = & (2.134)\\ &= -4\int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}e^{-2\alpha}\left(\partial_{\bar{z}}t_{zz}\cdot\xi_{\bar{z}} + \partial_z t_{\bar{z}\bar{z}}\cdot\xi_z\right) & (2.135) \end{aligned}$$

Also ist

$$P_1^\dagger : \begin{pmatrix} t_{zz} & t_{z\bar{z}} \\ t_{z\bar{z}} & t_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \mapsto -4e^{-2\alpha}\begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}}t_{zz} \\ \partial_z t_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \tag{2.136}$$

und der zur Berechnung von Δ_{FP} (**2**.123) gesuchte Operator $P_1^\dagger P_1$ nimmt folgende Form an

$$P_1^\dagger P_1\begin{pmatrix} \xi_z \\ \xi_{\bar{z}} \end{pmatrix} = P_1^\dagger\begin{pmatrix} 2\nabla_z\xi_z & 0 \\ 0 & 2\nabla_{\bar{z}}\xi_{\bar{z}} \end{pmatrix} = -8e^{-2\alpha}\begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}}\nabla_z\xi_z \\ \partial_z\nabla_{\bar{z}}\xi_{\bar{z}} \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} \nabla^z\nabla_z\xi_z \\ \nabla^{\bar{z}}\nabla_{\bar{z}}\xi_{\bar{z}} \end{pmatrix} \tag{2.137}$$

[9] Der Begriff "spurlos" kann im Folgenden verwirrend sein, wenn man unter der Spur die Summe der Diagonaleinträge einer Matrix versteht und die Komponenten des spurlosen symmetrischen Tensors t betrachtet. Es gilt nämlich **nicht** $t_{zz} = -t_{\bar{z}\bar{z}}$! Spurlos bezieht sich vielmehr auf die Kontraktion mit der Metrik g^{ab}. Betrachtet man allerdings die Tensoren mit einem nach oben gezogenen Index (und nur diese Tensoren sind Automorphismen, bilden also in denselben Raum ab), dann ist Spurbildung wieder gleichzusetzen mit der Summation der Diagonalelemente. Es gilt also sehr wohl $t_z^z = -t_{\bar{z}}^{\bar{z}}$. ♣

Für die Seeley-DeWitt-Koeffizienten brauchen wir eine Laplace-ähnliche Form. Für den Laplace-Operator gilt

$$\Box_g \xi_z = \nabla_a g^{ab} \nabla_b \xi_z = \left(\nabla^z \nabla_z + \nabla^{\bar{z}} \nabla_{\bar{z}}\right) \xi_z = g^{z\bar{z}} [\nabla_z, \nabla_{\bar{z}}] \xi_z + 2\nabla^z \nabla_z \xi_z \tag{2.138}$$

Nach (**E**.46) ist

$$[\nabla_z, \nabla_{\bar{z}}] \xi_z = R_{z\ z\bar{z}}^{\ z} \xi_z = 2\alpha_{,z\bar{z}} \xi_z = -\frac{R_g}{2} g_{z\bar{z}} \xi_z \tag{2.139}$$

so daß

$$2\nabla^z \nabla_z \xi_z = \Box_g \xi_z + \frac{R_g}{2} \xi_z \tag{2.140}$$

Äquivalentes gilt, wenn man auf $\xi_{\bar{z}}$ wirkt

$$\Box_g \xi_{\bar{z}} = \nabla_a g^{ab} \nabla_b \xi_{\bar{z}} = \left(\nabla^z \nabla_z + \nabla^{\bar{z}} \nabla_{\bar{z}}\right) \xi_{\bar{z}} = g^{z\bar{z}} [\nabla_{\bar{z}}, \nabla_z] \xi_{\bar{z}} + 2\nabla^{\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} \xi_{\bar{z}} \tag{2.141}$$

Nach (**E**.47) ist

$$[\nabla_{\bar{z}}, \nabla_z] \xi_{\bar{z}} = R_{\bar{z}\ \bar{z}z}^{\ \bar{z}} \xi_{\bar{z}} = 2\alpha_{,z\bar{z}} \xi_{\bar{z}} = -\frac{R_g}{2} g_{z\bar{z}} \xi_{\bar{z}} \tag{2.142}$$

so daß

$$2\nabla^{\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} \xi_{\bar{z}} = \Box_g \xi_{\bar{z}} + \frac{R_g}{2} \xi_{\bar{z}} \tag{2.143}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_1^\dagger P_1 = -4 \begin{pmatrix} \nabla^z \nabla_z & 0 \\ 0 & \nabla^{\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} \end{pmatrix} = 2\left(-\Box_g - \frac{R_g}{2} \cdot \mathbf{1}\right)} \tag{2.144}$$

Nach [AGMV86] ist dieser Operator positiv definit.

2.5.3 Variation von Δ_{FP}

Wenden wir uns nun endlich der eigentlichen Variation der Faddeev-Popov-Determinante, bzw. ihres Logarithmus' unter infinitesimalen Weyl-Transformationen zu, die wir für (**2**.64) brauchen. Für die Funktionaldeterminante wollen wir wieder die ζ-Funktions-Regularisierung verwenden (Anhang D, S.82ff)

$$\ln \operatorname{Det} P_1^\dagger P_1 \equiv -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \zeta_{P_1^\dagger P_1}(s)\right|_{s=0} \tag{D.4=2.145}$$

Als erstes werden wir die "Skalierung" (besser gesagt Transformation) des Operators $P_1^\dagger P_1$ unter Weyl-Trafo untersuchen. Wir verwenden dazu die erste Form von (**2**.144).

Unter einer Weyl-Transformation

$$g_{ab} \mapsto e^{2\omega\lambda} g_{ab}\,, \quad \alpha \mapsto \alpha + \omega\lambda \tag{2.146}$$

transformiert P_1 unter Verwendung von (**2**.130) wie

$$P_1 \xi = \begin{pmatrix} 2\left(\partial_z - 2\alpha_{,z}\right) \xi_z & 0 \\ 0 & 2\left(\partial_{\bar{z}} - 2\alpha_{,\bar{z}}\right) \xi_{\bar{z}} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2\left(\partial_z - 2\alpha_{,z} - 2\omega_{,z}\lambda\right) \xi_z & 0 \\ 0 & 2\left(\partial_{\bar{z}} - 2\alpha_{,\bar{z}} - 2\omega_{,z}\lambda\right) \xi_{\bar{z}} \end{pmatrix} = e^{2\omega\lambda} P_1 e^{-2\omega\lambda} \xi \equiv \tilde{P}_1 \xi \tag{2.147}$$

und $P_1^\dagger$ mit (**2**.136) wie

$$P_1^\dagger t = -4e^{-2\alpha} \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} t_{zz} \\ \partial_z t_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \mapsto e^{-2\omega\lambda} P_1^\dagger t \equiv \tilde{P}_1^\dagger t \tag{2.148}$$

Damit ist das Skalierungsverhalten von $P_1^\dagger P_1$

$$\boxed{P_1^\dagger P_1 \mapsto e^{-2\omega\lambda} P_1^\dagger e^{2\omega\lambda} P_1 e^{-2\omega\lambda} \equiv \tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} \tag{2.149}$$

Für Operatoren, die auf diese Art skalieren, werden wir in Abschnitt D.3.2 des Anhangs D herleiten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln \mathrm{Det}\left(\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1\right) = -2 \int \mathrm{d}^2\sigma\omega \left(2\tilde{\zeta}_{\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1}(\sigma,0) - \tilde{\zeta}_{\tilde{P}_1 \tilde{P}_1^\dagger}(\sigma,0)\right) \qquad (\mathbf{D}.43{=}\mathbf{2}.150)$$

wobei $\tilde{\zeta}$ definiert ist über

$$\zeta_O(s) \equiv \int \mathrm{d}^2\sigma \tilde{\zeta}_O(\sigma,s) \qquad (\mathbf{D}.23{=}\mathbf{2}.151)$$

ζ an der Stelle 0 kann man wieder durch den ersten Seeley-DeWitt-Koeffizienten ausdrücken

$$\zeta_O(0) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{tr}\, a_1(\sigma,\sigma) \qquad (\mathbf{D}.49{=}\mathbf{2}.152)$$

Zur Erinnerung: Für einen Operator von der Form

$$O = -D^2 + C \qquad (\mathbf{2}.153)$$

mit

$$D_a = \nabla_a + A_a \qquad (\mathbf{2}.154)$$

ist

$$\int \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{tr}\, a_1 = \int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\left[\frac{D}{6}R_g - C^\lambda_\lambda\right] \qquad (\mathbf{2}.155)$$

wobei D die Raumzeit-Dimension ist. (siehe z.B. [WW94, S.157],[BCVZ96, S.104])
Für den Operator $P_1^\dagger P_1 = 2\left(-\Box_g - \frac{R_g}{2}\cdot\mathbf{1}\right)$ ist also

$$\tilde{\zeta}_{\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1}(\sigma,0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{6}R_g + 2\frac{R_g}{2}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{8}{6}R_g \qquad (\mathbf{2}.156)$$

Jetzt müssen wir noch den Operator $P_1 P_1^\dagger$ in die gewünschte Form bringen

$$\begin{aligned}
P_1 P_1^\dagger \begin{pmatrix} t_{zz} & t_{z\bar{z}} \\ t_{z\bar{z}} & t_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} &\overset{(\mathbf{2}.136)}{=} -4P_1 \begin{pmatrix} e^{-2\alpha}\partial_{\bar{z}} t_{zz} \\ e^{-2\alpha}\partial_z t_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = & (\mathbf{2}.157)\\
&\overset{(\mathbf{2}.130)}{=} -4\begin{pmatrix} 2\left(\partial_z - 2\alpha_{,z}\right)e^{-2\alpha}\partial_{\bar{z}}t_{zz} & 0 \\ 0 & 2\left(\partial_{\bar{z}} - 2\alpha_{,\bar{z}}\right)e^{-2\alpha}\partial_z t_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = & (\mathbf{2}.158)\\
&= -4\begin{pmatrix} 2e^{-2\alpha}\left(\partial_z - 4\alpha_{,z}\right)\partial_{\bar{z}}t_{zz} & 0 \\ 0 & 2e^{-2\alpha}\left(\partial_{\bar{z}} - 4\alpha_{,\bar{z}}\right)\partial_z t_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = & (\mathbf{2}.159)\\
&= -4\begin{pmatrix} \nabla^{\bar{z}}\nabla_{\bar{z}}t_{zz} & 0 \\ 0 & \nabla^z\nabla_z t_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} & (\mathbf{2}.160)
\end{aligned}$$

Wir können nun von oben (($\mathbf{2}$.138) und ($\mathbf{2}$.141)) verwenden, daß

$$\begin{aligned}
\Box_g &= g^{z\bar{z}}[\nabla_z,\nabla_{\bar{z}}] + 2\nabla^z\nabla_z & (\mathbf{2}.161)\\
\text{bzw. } \Box_g &= g^{z\bar{z}}[\nabla_{\bar{z}},\nabla_z] + 2\nabla^{\bar{z}}\nabla_{\bar{z}} & (\mathbf{2}.162)
\end{aligned}$$

Allerdings ändern sich die Kommutatoren um den Faktor 2, da diese jetzt auf Komponenten von Rang-2-Tensoren wirken

$$\begin{aligned}
[\nabla_z,\nabla_{\bar{z}}]t_{\bar{z}\bar{z}} &= 2R^{\bar{z}}_{\bar{z}z\bar{z}}t_{\bar{z}\bar{z}} = Rg_{z\bar{z}}t_{\bar{z}\bar{z}} & (\mathbf{2}.163)\\
[\nabla_{\bar{z}},\nabla_z]t_{zz} &= 2R^z_{z\bar{z}z}t_{zz} = Rg_{z\bar{z}}t_{zz} & (\mathbf{2}.164)
\end{aligned}$$

Also ist

$$P_1 P_1^\dagger = 2\begin{pmatrix} -\Box_g + R & 0 \\ 0 & -\Box_g + R \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{2}.165)$$

und

$$\tilde{\zeta}_{\tilde{P}_1\tilde{P}_1^\dagger}(\sigma,0) = \frac{a_1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{6}R_g - 2R_g\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{10}{6}R_g \qquad (\mathbf{2}.166)$$

Setzen wir nun ($\mathbf{2}$.156) und ($\mathbf{2}$.166) wieder in ($\mathbf{D}$.43=$\mathbf{2}$.150) ein, so ergibt sich

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\mathrm{Det}\left(\tilde{P}_1^\dagger\tilde{P}_1\right) = -\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\omega\left(2\frac{8}{6}+\frac{10}{6}\right)R_g = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\omega\frac{26}{6}R_g} \qquad (\mathbf{2}.167)$$

2.6 Bewegungsgleichungen für die Hintergrundfelder

Setzen wir nun ($\mathbf{2}$.76), ($\mathbf{2}$.98) und ($\mathbf{2}$.167) wieder ein in ($\mathbf{2}$.64)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln Z[e^{2\omega\lambda}g]\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\Delta_{FP}[e^{2\omega\lambda}g] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}S_p[\bar{X},e^{2\omega\lambda}g] - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\mathrm{Det}\,'O(e^{2\omega\lambda}g)\bigg|_{\lambda=0} + \mathcal{O}(\alpha') \stackrel{!}{=} 0 \quad (\mathbf{2}.64=\mathbf{2}.168)$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=}\; & -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\omega\frac{26}{6}R_g + \\
& +\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\omega\left(\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta\Phi_{;\alpha\beta} - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi_{;\gamma}\right) + \qquad (\mathbf{2}.169)\\
& +\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\omega\left(\frac{D}{6}R_g + \partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta\left(R_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}H^\lambda_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\lambda}\right) + \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta H^\lambda_{\alpha\beta;\lambda}\right) + \mathcal{O}(\alpha') + \mathcal{O}(\lambda) = \\
=\; & \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\omega\left(\frac{D-26}{6}R_g + \partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta\left(R_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}H^\lambda_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\lambda}+2\Phi_{;\alpha\beta}\right) + \right. \qquad (\mathbf{2}.170)\\
& \left. +i\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta\left(\frac{1}{2}H^\lambda_{\alpha\beta;\lambda} - H_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi_{;\gamma}\right)\right) + \mathcal{O}(\alpha') \qquad (\mathbf{2}.171)
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle ω erfüllt sein muß, und für alle $\bar{X}$, die die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen, ergeben sich die folgenden Feldgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}
R_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}H^\lambda_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\lambda}+2\Phi_{;\alpha\beta}+\mathcal{O}(\alpha') &\stackrel{!}{=} 0 \qquad (\mathbf{2}.172)\\
\frac{1}{2}H^\lambda_{\alpha\beta;\lambda} - H_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi_{;\gamma} + \mathcal{O}(\alpha') &\stackrel{!}{=} 0 \qquad (\mathbf{2}.173)\\
\frac{D-26}{6} + \mathcal{O}(\alpha') &\stackrel{!}{=} 0 \qquad (\mathbf{2}.174)
\end{aligned}}$$

Diese stimmen in nullter Ordnung in α' überein mit denen in [Pol, S.111].

Kapitel 3

Kovariante Ableitung und ihre Feldstärke

3.1 Kovarianz von O und die Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung

3.1.1 Transformation von x unter Raumzeit-Diffeomorphismen

Bei der Berechnung des Fluktuationsoperators O in Kapitel 2, Abschnitt 2.1, war die Frage nach der Kovarianz dieses Operators unter den Symmetrietransformationen der Theorie aufgetaucht (siehe (**2**.28)). Wir hatten zuvor das Feld $X^\mu(\sigma)$ der Raumzeitkoordinaten zerlegt in ein Hintergrundfeld $\bar{X}^\mu(\sigma)$ (Der Ausdruck "Hintergrundfeld" hat in diesem Zusammenhang nichts zu tun mit den Hintergrundfeldern $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ und Φ) und ein Feld der Quantenfluktuationen $x^\mu(\sigma)$ (siehe S.16)

$$X^\mu \equiv \bar{X}^\mu + x^\mu \qquad (\mathbf{3}.1)$$

Genauso wie bei der Hintergrundfeld-Methode, wie sie zum Beispiel in [Pok, S.279ff] beschrieben wird, fordern wir unter den gegebenen Symmetrietransformationen der Theorie vom Hintergrundfeld $\bar{X}^\mu$ dasselbe Transformationsverhalten wie das des Feldes X^μ und erhalten daraus die Transformation der Quantenfluktuationen. Während sich z.B. bei Worldsheet-Diffeomorphismen oder bei der Eichtransformation des Axionfeldes kein besonderes Transformationsverhalten für die Quantenfluktuationen x^μ ergibt[1], ist für uns speziell die Transformation unter Raumzeit-Diffeomorphismen von großem Interesse. Neben dem Transformationsverhalten von x^μ werden wir auch die Transformation von $\partial_a \bar{X}$ und von $\partial_a x^\mu$ betrachten, da erstere explizit in O vorkommen, und die in O auftauchenden Differentialoperatoren auf x^μ wirken.

Betrachte also den (infinitesimalen) Raumzeit-Diffeomorphismus

$$X^\mu \to \tilde{X}^\mu \equiv X^\mu + F^\mu(X) \qquad (\mathbf{3}.2)$$

mit

$$F^\mu(X) = F^\mu(\bar{X}+x) = F^\mu(\bar{X}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} F^\mu_{,\nu_1\cdots\nu_k}(\bar{X}) x^{\nu_1}\cdots x^{\nu_k} \qquad (\mathbf{3}.3)$$

Damit $\bar{X}$ genauso wie X transformiert, teilen wir die Transformation auf in

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{X}}^\mu &= \bar{X}^\mu + F^\mu(\bar{X}) && (\mathbf{3}.4)\\ \tilde{x}^\mu &= x^\mu + f^\mu(\bar{X}, x) && (\mathbf{3}.5) \end{aligned}$$

mit

$$f^\mu(\bar{X}, x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} F^\mu_{,\nu_1\cdots\nu_k}(\bar{X}) x^{\nu_1}\cdots x^{\nu_k} = F^\mu_{,\nu}(\bar{X}) x^\nu + \mathcal{O}(x^3) = F^\mu_{,\nu}(X) x^\nu + \mathcal{O}(x^3) \qquad (\mathbf{3}.6)$$

[1] Bei Worldsheet-Diffeomorphismen transformiert sich $X^\mu(\sigma)$ und damit auch $\bar{X}^\mu(\sigma)$ wie ein Worldsheet-Skalar, also muß auch $x^\mu(\sigma)$ wie ein Skalar transformieren. Bei der Eichtransformation des Axionfeldes (die verallgemeinerte Polyakov-Wirkung ist invariant unter der Eichtransformation $B_{\mu\nu} \mapsto B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Omega_\nu - \partial_\nu \Omega_\mu$) transformieren X^μ und damit auch $\bar{X}^\mu$ gar nicht, also darf sich auch x^μ nicht transformieren. ♣

Infinitesimale x transformieren also wie ein Vektor (im Raum der X). Da man jetzt zusätzlich einen Raumzeit-diffeomorphismus im Raum der $\bar{X}$ hat, ist klar, daß alle bei $\bar{X}$ ausgewerteten Tensorfelder (also $G_{\mu\nu}(\bar{X})$, $B_{\mu\nu}(\bar{X})$ und $\Phi(\bar{X})$) nun bezüglich dieses Diffeomorphismus' wie Tensoren (bzw. Skalare) transformieren (allerdings *nicht* bezüglich des ursprünglichen Diffeomorphismus' im Raum der X!). Dasselbe gilt für $\partial_a \bar{X}^\mu$, welches also wie ein kontravarianter Vektor transformiert. Explizit gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_a \tilde{\bar{X}}^\mu &= \partial_a \tilde{\bar{X}}^\mu = \partial_a \bar{X}^\mu + F^\mu_{,\nu}(\bar{X}) \partial_a \bar{X}^\nu && (3.7)\\
\nabla_a \tilde{x}^\mu &= \partial_a \tilde{x}^\mu = \partial_a x^\mu + \frac{\partial}{\partial x^\nu} f^\mu(\bar{X}, x) \partial_a x^\nu + \frac{\partial}{\partial \bar{X}^\nu} f^\mu(\bar{X}, x) \partial_a \bar{X}^\nu = && (3.8)\\
&= \partial_a x^\mu + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big(F^\mu_{,\lambda}(\bar{X}) x^\lambda + O(x^2)\Big) \cdot \partial_a x^\nu + \frac{\partial}{\partial \bar{X}^\nu}\Big(F^\mu_{,\lambda}(\bar{X}) x^\lambda + O(x^2)\Big) \cdot \partial_a \bar{X}^\nu && (3.9)\\
&= \partial_a x^\mu + F^\mu_{,\nu}(\bar{X}) \partial_a x^\nu + F^\mu_{,\lambda\nu}(\bar{X}) x^\lambda \cdot \partial_a \bar{X}^\nu + O(x^2) && (3.10)
\end{aligned}$$

Die Transformation von $\partial_a x^\mu$ ist also auch für infinitesimale x keine Tensortransformation! Dasselbe gilt auch für $\Box_g x^\mu = \nabla^a \partial_a x^\mu$.

Wir wollen jedoch am Ende einen tensoriellen Ausdruck für den Fluktuationsoperator O (der ∂_a und $\Box_g$ enthält, welche auf x^μ wirken), da aus diesem Operator die kovarianten Feldgleichungen in niedrigster Ordnung in α' hervorgehen sollen. Um den Operator in eine manifest tensorielle Form zu bringen, muß man also versuchen, die Worldsheet-Ableitungen ∇_a durch Raumzeit-kovariante Ableitungen D_a zu ersetzen, und zwar in dem Sinne, daß sich die Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung $D_a T^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ eines Raumzeit-Tensors $T^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ erneut wie ein Raumzeit-Tensor transformiert.

3.1.2 Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung

Wie am Ende des letzten Abschnitts erwähnt, suchen wir eine Worldsheet-Ableitung D_a, die die Raumzeit-tensoriellen Eigenschaften unverändert läßt. Betrachte dazu vorerst die Wirkung der üblichen Worldsheet-kovarianten Ableitung ∇_a auf ein Raumzeit-tensorielles Feld ohne Worldsheet-Indizes (also ein Worldsheet-Skalar)

$$\nabla_a T^{\mu_1 \cdots \mu_n}(\bar{X}) = \partial_a T^{\mu_1 \cdots \mu_n}(\bar{X}) = T^{\mu_1 \cdots \mu_n}{}_{,\rho}(\bar{X}) \cdot \partial_a \bar{X}^\rho \qquad (3.11)$$

Hier ist es völlig offensichtlich, daß die Ableitung

$$\tilde{D}_a T^{\mu_1 \cdots \mu_n}(\bar{X}) \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_n}{}_{;\rho}(\bar{X}) \cdot \partial_a X^\rho \qquad (3.12)$$

(wobei wir die partielle Raumzeit-Ableitung $T^{\mu_1 \cdots \mu_n}{}_{,\rho}$ durch die kovariante $T^{\mu_1 \cdots \mu_n}{}_{;\rho}$ ersetzt haben) zum Ziel führt. Sie ist einfach eine Projektion der Raumzeit-kovarianten Ableitung auf das Worldsheet. Wir wollen diese Wirkung noch kombinieren mit der Worldsheet-kovarianten Ableitung ∇_a. Hat man also ausschließlich Worldsheet-Tensorindizes, so sollte $\tilde{D}_a$ wirken, wie ∇_a

$$\tilde{D}_a T^{b_1 \ldots b_n} \equiv \nabla_a T^{b_1 \ldots b_n} \qquad (3.13)$$

Für Terme mit gemischten Indizes ist es also naheliegend, die Wirkung von $\tilde{D}_a$ folgendermaßen zu definieren

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_a T^{\mu_1 \ldots \mu_m b_1 \ldots b_n} \equiv\ & \partial_a T^{\mu_1 \ldots \mu_m b_1 \ldots b_n} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma^{b_l}_{ac} T^{\mu_1 \ldots \mu_m b_1 \ldots b_{l-1} c b_{l+1} \ldots b_n} + \\
& + \sum_{k=1}^{m} \partial_a \bar{X}^\rho \Gamma^{\mu_k}_{\rho\lambda} T^{\mu_1 \ldots \mu_{k-1} \lambda \mu_{k+1} \ldots \mu_m b_1 \ldots b_n} \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Entsprechendes mit negativen Vorzeichen soll gelten für untenstehende Indizes. $\tilde{D}_a$ erbt die Eigenschaften einer Ableitung direkt von der Raumzeit-kovarianten Ableitung ∇_ρ und der Worldsheet-kovarianten Ableitung ∇_a.

In 2.1 benötigen wir lediglich die Wirkung einer solchen Ableitung auf Größen mit einem kontravarianten Raumzeit-Index (x^μ und $\partial_b x^\mu$). In diesem Fall gilt also

$$\tilde{D}_a{}^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \nabla_a + \partial_a \bar{X}^\rho \Gamma^\mu_{\rho\nu} \qquad (3.15)$$

Wir haben in 2.1 noch einen Term zu dieser Ableitung hinzuaddiert, der die Kovarianz allerdings nicht beeinträchtigt

$$D_a{}^\lambda{}_\gamma \equiv \delta^\lambda_\gamma \nabla_a + \underbrace{\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\partial_a \bar{X}^\alpha + \frac{i}{2}\varepsilon_{ca}\partial^c \bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\gamma}}_{\equiv A^b{}^\lambda{}_\gamma} \qquad (\mathbf{2}.29{=}\mathbf{3}.16)$$

Der Grund war lediglich, durch quadratische Ergänzung den Fluktuationsoperator O als Quadrat von D (plus einer Inhomogenität C) schreiben zu können (wie in ($\mathbf{2}$.32)). Beachte, daß D_a auch invariant ist unter der Eichtransformation des Axionfeldes, da nur die eichinvariante Axionfeldstärke H vorkommt.

Es ist vielleicht noch interessant anzumerken, daß sich mit diesem Operator die klassischen Bewegungsgleichungen (siehe ($\mathbf{B}$.8=$\mathbf{2}$.37) oder ($\mathbf{B}$.8)) schreiben lassen als

$$D^a \partial_a \bar{X}^\mu = \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\mu} R_g \qquad (\mathbf{3}.17)$$

3.2 Feldstärke F_{ab}

Definiert man wie in ($\mathbf{2}$.46)

$$A_b{}^\lambda{}_\gamma \equiv \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\partial_b \bar{X}^\alpha - \frac{i}{2}\varepsilon_{ba}\partial^a \bar{X}^\alpha H^\lambda_{\alpha\gamma} \qquad (\mathbf{3}.18)$$

so wird bei der Wirkung der kovarianten Ableitung auf infinitesimale Quantenfluktuationen x^μ

$$D_b x = (\partial_a + A_a)\, x \qquad (\mathbf{3}.19)$$

die Analogie von A_a zu einem Eichfeld deutlich.

Im folgenden werden wir die Komponenten der **Feldstärke**

$$F \equiv \mathrm{d}A + A \wedge A \qquad (\mathbf{3}.20)$$

zu diesem Eichfeld berechnen, die wir noch für die Anwendung der Schwinger-Methode in 4.1 benötigen werden. Es wird später auffallen, daß die Form dieser Feldstärke große Ähnlichkeit mit der Inhomogenität C des Fluktuationsoperators hat.

Bevor wir mit der Rechnung beginnen, betrachten wir zunächst ein paar Eigenschaften des antisymmetrischen Epsilon-Tensors ε^{ab}.
Mit

$$\epsilon^{ab} \equiv \epsilon_{ab} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{3}.21)$$

$$\varepsilon^{ab} \equiv \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}} \qquad (\mathbf{3}.22)$$

gilt

$$\varepsilon^{cd}\varepsilon_{ce} = \delta^d_e$$

Unter Verwendung der Antisymmetrisierungs-Klammern

$$T_{[a,b]} \equiv \frac{1}{2}\left(T_{ab} - T_{ba}\right) \qquad (\mathbf{3}.23)$$

gilt dann für einen beliebigen Tensor T_{ab} und einen antisymmetrischen Tensor A_{ab}

$$A_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}A_{cd} \qquad (\mathbf{3}.24)$$

$$T_{[a,b]} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}T_{[cd]} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}T_{cd} \qquad (\mathbf{3}.25)$$

Während der Rechnung werden wir auch noch einmal die klassischen Bewegungsgleichungen (**B**.8) brauchen

$$\Box_g \bar{X}^\gamma = -\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial^c\bar{X}^\beta - \frac{i}{2}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta H^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\gamma}R_g \qquad (\mathbf{B}.8{=}\mathbf{3}.26)$$

Die Komponenten der Feldstärke sind

$$\begin{aligned} F_{ab} &= [D_a, D_b] = && (\mathbf{3}.27)\\ &= \partial_a A_b - \partial_b A_a + [A_a, A_b] = && (\mathbf{3}.28)\\ &= \nabla_a A_b - \nabla_b A_a + [A_a, A_b] = && (\mathbf{3}.29)\\ &= 2\nabla_{[a}A_{b]} + [A_a, A_b] && (\mathbf{3}.30)\end{aligned}$$

Trenne das Eichfeld für die folgende Rechnung noch in einen Metrik-Anteil und einen Axion-Anteil

$$\begin{aligned} A^{G\mu}_{a\ \nu} &\equiv \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\partial_a\bar{X}^\alpha && (\mathbf{3}.31)\\ A^{B\mu}_{a\ \nu} &\equiv -\frac{i}{2}\varepsilon_{ad}\partial^d\bar{X}^\alpha H^\mu_{\alpha\nu} && (\mathbf{3}.32)\\ \text{so daß}\quad A_a &= A^G_a + A^B_a && (\mathbf{3}.33)\end{aligned}$$

und setzte in (**3**.30) ein

$$F_{ab} = \underbrace{2\nabla_{[a}A^G_{b]} + [A^G_a, A^G_b]}_{\equiv F^G_{ab}} + \underbrace{2\nabla_{[a}A^B_{b]} + [A^B_a, A^B_b]}_{\equiv F^B_{ab}} + [A^G_a, A^B_b] + [A^B_a, A^G_b] \qquad (\mathbf{3}.34)$$

Betrachte zuerst die reinen Metrik-Terme

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[a}A^{G\mu}_{b]\ \nu} &= 2\Gamma^\mu_{\beta\nu,\alpha}\partial_{[a}\bar{X}^\alpha\partial_{b]}\bar{X}^\beta + 2\Gamma^\mu_{\beta\nu}\underbrace{\nabla_{[a}\partial_{b]}\bar{X}^\beta}_{=0} = && (\mathbf{3}.35)\\ &= \partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta\left(\Gamma^\mu_{\beta\nu,\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\nu,\beta}\right) && (\mathbf{3}.36)\end{aligned}$$

und

$$[A^G_a, A^G_b]^\mu_{\ \nu} = \partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta\left(\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\right) \qquad (\mathbf{3}.37)$$

also

$$F^{G\mu}_{ab\ \nu} = \partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta R^\mu_{\nu\alpha\beta} \overset{(\mathbf{3}.24)}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta R^\mu_{\nu\alpha\beta} \qquad (\mathbf{3}.38)$$

Betrachte jetzt die reinen Axionfeld-Terme

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[a}A^{B\mu}_{b]\ \nu} &= -i\nabla_{[a}\partial^d\bar{X}^\gamma\varepsilon_{b]d}\cdot H^\mu_{\gamma\nu} - i\partial_{[a}\bar{X}^\beta\varepsilon_{b]d}\partial^d\bar{X}^\alpha H^\mu_{\alpha\nu,\beta} = && (\mathbf{3}.39)\\ \overset{(\mathbf{3}.25)}{=} &= -\frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\underbrace{\varepsilon^{ce}\nabla_c\partial^d\bar{X}^\gamma\varepsilon_{ed}}_{-\Box_h\bar{X}^\alpha}\cdot H^\mu_{\gamma\nu} - \frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\underbrace{\varepsilon^{ce}\partial_c\bar{X}^\beta\varepsilon_{ed}\partial^d\bar{X}^\alpha}_{-\partial_c\bar{X}^\alpha\partial^c\bar{X}^\beta} H^\mu_{\alpha\nu,\beta} = && (\mathbf{3}.40)\\ \overset{(\mathbf{B}.8=\mathbf{3}.26)}{=} & \frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\left(-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial^c\bar{X}^\beta - \frac{i}{2}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta H^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\gamma}R_g\right)H^\mu_{\gamma\nu} +\\ & + \frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial^c\bar{X}^\beta H^\mu_{\alpha\nu,\beta} = && (\mathbf{3}.41)\\ = & \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta H_{\alpha\beta}{}^\gamma H^\mu_{\gamma\nu} + \frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial^c\bar{X}^\beta\left(H^\mu_{\alpha\nu,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}H^\mu_{\gamma\nu}\right) +\\ & + \frac{i}{4}\varepsilon_{ab}\alpha' R_g\Phi^{,\gamma}H^\mu_{\gamma\nu} && (\mathbf{3}.42)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [A^B_a, A^B_b]^\mu_{\ \nu} &= 2A^B_{[a}A^{B\mu}_{b]\ \nu} \overset{(\mathbf{3}.25)}{=} \varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}A^B_c A^B_d = && (\mathbf{3}.43)\\ &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{ab}\underbrace{\varepsilon^{cd}\varepsilon_{ce}}_{\delta^d_e}\partial^e\bar{X}^\alpha H^\mu_{\alpha\gamma}\varepsilon_{df}\partial^f\bar{X}^\beta H^\gamma_{\beta\nu} = && (\mathbf{3}.44)\\ &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta H^\mu_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\nu} && (\mathbf{3}.45)\end{aligned}$$

Damit ist

$$F^{B\,\mu}_{ab\ \nu} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta\left(H_{\alpha\beta}{}^\lambda H^\mu_{\lambda\nu} - H^\mu_{\alpha\lambda}H^\lambda_{\beta\nu}\right) + \frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\partial^c\bar{X}^\alpha\partial_c\bar{X}^\beta\left(H^\mu_{\alpha\nu,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}H^\mu_{\gamma\nu}\right) + \varepsilon_{ab}\frac{i}{4}\alpha' R_g\Phi^{,\gamma}H^\mu_{\gamma\nu} \tag{3.46}$$

Betrachte schließlich noch die gemischten Terme

$$\begin{aligned}
[A^G_a, A^B_b] + [A^B_a, A^G_b]^\mu_{\ \nu} &= 2A^G_{[a}, A^B_{b]} + A^B_{[a}, A^{G\,\mu}_{b]\ \nu} && (3.47)\\
&= -i\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\underbrace{\partial_{[a}\bar{X}^\alpha\cdot\varepsilon_{b]d}\partial^d\bar{X}^\beta}_{\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\underbrace{\varepsilon^{ce}\varepsilon_{ed}}_{-\delta^c_d}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial^d\bar{X}^\beta} H^\lambda_{\beta\nu} - i\underbrace{\varepsilon_{[ad}\partial_{b]}\bar{X}^\beta\partial^d\bar{X}^\alpha}_{\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\underbrace{\varepsilon^{ce}\varepsilon_{cd}}_{\delta^e_d}\partial_e\bar{X}^\alpha\partial^d\bar{X}^\beta} H^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} = && (3.48)\\
&= \frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial^c\bar{X}^\beta\left(\Gamma^\mu_{\beta\lambda}H^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu}H^\mu_{\alpha\lambda}\right) && (3.49)
\end{aligned}$$

Alle Terme zusammen ergeben dann

$$\boxed{F_{ab}{}^\mu_{\ \nu} = \varepsilon_{ab}\left\{\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta\left(\frac{1}{2}R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{4}H_{\alpha\beta}{}^\lambda H^\mu_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}H^\mu_{\alpha\lambda}H^\lambda_{\beta\nu}\right) + \frac{i}{2}\partial^c\bar{X}^\alpha\partial_c\bar{X}^\beta H^\mu_{\alpha\nu;\beta} + \frac{i}{4}\alpha' R_g\Phi^{,\gamma}H^\mu_{\gamma\nu}\right\}} \tag{3.50}$$

Wie erwartet ist das Ergebnis ein Raumzeit-kovarianter Ausdruck. Außerdem ist F neben der Antisymmetrie in a und b auch noch antisymmetrisch in μ und ν. Es fällt zudem auf, daß die Terme in den Klammern große Ähnlichkeit zu den Termen der Inhomogenität C unseres Fluktuationsoperators $O = -D^2 + C$ haben:

$$C^\mu_\nu \equiv -\partial_a\bar{X}^\alpha\partial^a\bar{X}^\beta\left(R^\mu_{\alpha\nu\beta} + \frac{1}{4}H^\mu_{\alpha\gamma}H^\gamma_{\beta\nu}\right) - \frac{i}{4}\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^\alpha\partial_b\bar{X}^\beta\left(H^\mu_{\alpha\beta;\nu} + H_{\nu\alpha\beta}{}^{;\mu}\right) + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\lambda}{}_{;\rho}R_g \tag{2.44=3.51}$$

Diese Ähnlichkeit soll im folgenden Abschnitt näher untersucht werden. Die dabei gefundenen Erkenntnisse führen dann zu weiteren davon unabhängigen geometrischen Überlegungen.

3.3 Einige Geometrische Betrachtungen

Sieht man H als Teil einer Konnexion, so ähneln die Terme in F (und auch in C) denen eines Krümmungstensors. Um das näher zu untersuchen, definieren wir eine neue (nicht torsionsfreie) **Raumzeit-Konnexion**

$$\boxed{\Gamma_H{}^\alpha_{\mu\beta} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \tfrac{1}{2}H^\alpha_{\mu\beta}} \tag{3.52}$$

Diese Konnexion ist kompatibel mit der Metrik

$$\nabla_{H\,\mu}G_{\alpha\beta} \equiv \nabla_\mu G_{\alpha\beta} - H^\lambda_{\mu\alpha}G_{\lambda\beta} - H^\lambda_{\mu\beta}G_{\lambda\alpha} = 0 \tag{3.53}$$

Bei der Bildung des dazugehörigen Krümmungstensors muß jetzt auf die Reihenfolge der unteren Indizes der Konnexion geachtet werden. Das wurde in Anhang E nicht gemacht, weshalb wir den Riemann Tensor hier noch einmal neu definieren (Diese Definition findet man z.B. in [Spi, S.188] oder [Nak, S.216], und sie stimmt für torsionsfreie Konnexionen mit unserer bisherigen Definition überein)

$$R_H{}^\mu_{\alpha\nu\beta} \equiv \Gamma_H{}^\mu_{\beta\alpha,\nu} - \Gamma_H{}^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma_H{}^\mu_{\nu\lambda}\Gamma_H{}^\lambda_{\beta\alpha} - \Gamma_H{}^\mu_{\beta\lambda}\Gamma_H{}^\lambda_{\nu\alpha} \tag{3.54}$$

Setzen wir nun die neue Konnexion ein, so wird ihr Krümmungstensor gerade zu

$$\begin{aligned}
R_H{}^\mu_{\alpha\nu\beta} = &\left(\Gamma^\mu_{\beta\alpha,\nu} + \frac{1}{2}H^\mu_{\beta\alpha,\nu}\right) - \left(\Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \frac{1}{2}H^\mu_{\nu\alpha,\beta}\right) +\\
&+ \left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}H^\mu_{\nu\lambda}\right)\left(\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}H^\lambda_{\beta\alpha}\right) -\\
&- \left(\Gamma^\mu_{\beta\lambda} + \frac{1}{2}H^\mu_{\beta\lambda}\right)\left(\Gamma^\lambda_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}H^\lambda_{\nu\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\boxed{{R_H}^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} + \tfrac{1}{4}H^{\mu}_{\nu\lambda}H^{\lambda}_{\beta\alpha} - \tfrac{1}{4}H^{\mu}_{\beta\lambda}H^{\lambda}_{\nu\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(H^{\mu}_{\beta\alpha;\nu} - H^{\mu}_{\nu\alpha;\beta}\right)} \tag{3.56}$$

Zerlege nun ${R_H}^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}$ in einen in μ und ν symmetrischen Teil und einen in μ und ν antisymmetrischen Teil

$$R^{S\,\mu}_{H\;\alpha\nu\beta} \equiv \frac{1}{2}\left({R_H}^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} + {R_H}_{\nu\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\right) \tag{3.57}$$

$$R^{A\,\mu}_{H\;\alpha\nu\beta} \equiv \frac{1}{2}\left({R_H}^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} - {R_H}_{\nu\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\right) \tag{3.58}$$

Sei weiter $A^{\alpha\beta}$ ein in α und β antisymmetrischer Tensor (z.B. $\varepsilon^{ab}\partial_a\bar{X}^{\alpha}\partial_b\bar{X}^{\beta}$) und $S^{\alpha\beta}$ ein in α und β symmetrischer Tensor. Wir kontrahieren nun nacheinander $R^{S\,\mu}_{H\;\alpha\nu\beta}$ und $R^{A\,\mu}_{H\;\alpha\nu\beta}$ jeweils mit $A^{\alpha\beta}$ und $S^{\alpha\beta}$ in der Hoffnung, Terme zu erhalten, die denen in der Feldstärke und in der Inhomogenität C gleichen.

$$S^{\alpha\beta}R^{S\,\mu}_{H\;\alpha\nu\beta} = S^{\alpha\beta}\left(R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} - \frac{1}{4}H^{\mu}_{\beta\lambda}H^{\lambda}_{\nu\alpha}\right) = S^{\alpha\beta}\left(R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} + \frac{1}{4}H^{\mu}_{\alpha\lambda}H^{\lambda}_{\beta\nu}\right) \tag{3.59}$$

$$A^{\alpha\beta}R^{S\,\mu}_{H\;\alpha\nu\beta} = \frac{1}{4}A^{\alpha\beta}\left(H^{\mu}_{\beta\alpha;\nu} + {H_{\nu\beta\alpha}}^{;\mu}\right) = -\frac{1}{4}A^{\alpha\beta}\left(H^{\mu}_{\alpha\beta;\nu} + {H_{\nu\alpha\beta}}^{;\mu}\right) \tag{3.60}$$

Nehmen wir jetzt den in μ und ν antisymmetrischen Teil

$$S^{\alpha\beta}R^{A\,\mu}_{H\;\alpha\nu\beta} = -\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}H^{\mu}_{\nu\alpha;\beta} = \frac{1}{2}S^{\alpha\beta}H^{\mu}_{\alpha\nu;\beta} \tag{3.61}$$

Bevor wir nun als letztes noch $A^{\alpha\beta}$ mit dem antisymmetrischen Teil unseres neuen Krümmungstensors kontrahieren, erwähnen wir noch zwei Formeln, die wir gleich benötigen werden. Zum einen gilt

$$\frac{1}{2}\left(R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} - {R_{\nu\alpha}}^{\mu}{}_{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} - R^{\mu}_{\beta\nu\alpha}\right) = \frac{1}{2}R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} \tag{3.62}$$

und zum anderen gilt für H die **Bianchi-Identität**

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}(\mathrm{d}B) = 0 \tag{3.63}$$

was in Komponenten die folgende Form annimmt

$$H_{\alpha\beta\gamma,\delta} - H_{\delta\beta\gamma,\alpha} - H_{\alpha\delta\gamma,\beta} - H_{\alpha\beta\delta,\gamma} = 0 \tag{3.64}$$

Dieselbe Identität gilt auch für Raumzeit-kovariante Ableitungen

$$H_{\alpha\beta\gamma;\delta} - H_{\delta\beta\gamma;\alpha} - H_{\alpha\delta\gamma;\beta} - H_{\alpha\beta\delta;\gamma} = 0 \tag{3.65}$$

Jetzt können wir uns also der letzten Kontraktion zuwenden

$$\begin{aligned}
A^{\alpha\beta}R^{A\,\mu}_{H\;\alpha\nu\beta} &\overset{(3.62),(3.65)}{=} A^{\alpha\beta}\Bigg\{\frac{1}{2}R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\underbrace{H^{\mu}_{\nu\alpha;\beta}}_{\to\frac{1}{2}H^{\mu}_{\nu\alpha;\beta}-\frac{1}{2}H^{\mu}_{\nu\beta;\alpha}} - \frac{1}{2}H^{\mu}_{\beta\alpha;\nu} + \frac{1}{2}{H_{\nu\beta\alpha}}^{;\mu}\right)}_{=0\,(\text{Bianchi})} + \\
&\quad + \frac{1}{4}H^{\mu}_{\nu\lambda}H^{\lambda}_{\beta\alpha} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(H^{\mu}_{\beta\lambda}H^{\lambda}_{\nu\alpha} - H_{\nu\beta\lambda}{H^{\lambda\mu}}_{\alpha}\right)\right)\Bigg\} = \qquad (3.66)\\
&= A^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{4}{H_{\alpha\beta}}^{\lambda}H^{\mu}_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}H^{\mu}_{\alpha\lambda}H^{\lambda}_{\beta\nu}\right) \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

Verwendet man nun die Ergebnisse (**3**.59-**3**.61) und (**3**.67), und vergleicht sie mit (**3**.50) und (**2**.44=**3**.51), so bekommt man schließlich

$$\boxed{\begin{aligned} F_{ab}{}^{\mu}_{\nu} &= i\varepsilon_{ab}\left\{\left(g^{cd}-i\varepsilon^{cd}\right)\partial_c\bar{X}^{\alpha}\partial_d\bar{X}^{\beta}R^{A\ \mu}_{H\ \alpha\nu\beta}+\frac{1}{4}\alpha' R_g\Phi^{,\gamma}H^{\mu}_{\gamma\nu}\right\} && (\mathbf{3}.68)\\ C^{\mu}_{\nu} &= -\left(g^{cd}-i\varepsilon^{cd}\right)\partial_c\bar{X}^{\alpha}\partial_d\bar{X}^{\beta}R^{S\ \mu}_{H\ \alpha\nu\beta}+\frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\mu}{}_{;\nu}R_g && (\mathbf{3}.69)\end{aligned}}$$

Man kann also offensichtlich mit (**3**.57) und (**3**.58) die Feldstärke und die Inhomogenität so kombinieren, daß sich R^A_H und R^S_H zu dem vollständigen Krümmungstensor R_H bezüglich der Konnexion Γ_H ergänzen. Die Dilatonterme ergeben dabei eine bezüglich dieser Konnexion kovariante Ableitung ∇_H

$$\boxed{i\varepsilon_{ab}C^{\mu}_{\nu}-F_{ab}{}^{\mu}_{\nu}=-i\varepsilon_{ab}\left\{\left(g^{cd}-i\varepsilon^{cd}\right)\partial_c\bar{X}^{\alpha}\partial_d\bar{X}^{\beta}R_H{}^{\mu}_{\alpha\nu\beta}+\frac{1}{2}\alpha' R_g\nabla_{H\nu}\Phi^{,\mu}\right\}} \qquad (\mathbf{3}.70)$$

Hieraus erkennt man auch, daß die Dilatonterme in F^{μ}_{ν} und C^{μ}_{ν} auch die jeweils in μ und ν antisymmetrischen bzw. symmetrischen Anteile der $H-$kovarianten Ableitung $\nabla_{H\nu}\Phi^{,\mu}$ sind. Mit der Bewegungsgleichung (**3**.17) könnte man den Dilatonterm auch wieder ersetzen durch

$$\frac{1}{2}\alpha' R_g\nabla_{H\nu}\Phi^{,\mu}=\nabla_{H\nu}D^a\partial_a\bar{X}^{\mu} \qquad (\mathbf{3}.71)$$

Übrigens kann man auch die Dilatonterme aus der Weyl-Variation der klassischen Bewegungsgleichung (**2**.76) mit Hilfe der H-kovarianten Ableitung ausdrücken, und erkennt somit auch die Feldgleichungen (**2**.172) und (**2**.173) als symmetrischen und antisymmetrischen Teil der folgenden mit den neu definierten Größen geschriebenen Feldgleichung

$$\boxed{R_{H\mu\nu}=-2\nabla_{H\mu}\nabla_{H\nu}\Phi} \qquad (\mathbf{3}.72)$$

Diese erfolgreiche Erweiterung der Konnexion wirft die Frage auf, ob nicht auch die Erweiterung des Skalarprodukts sinnvoll wäre. Betrachte dazu die klassische Wirkung (**1**.37). Unter Beachtung der Symmetrien in den Indizes kann man sie umschreiben in

$$\begin{aligned} S_p[X,g] &= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left\{g^{ab}\partial_aX^{\mu}\partial_bX^{\nu}G_{\mu\nu}(X)-i\varepsilon^{ab}\partial_aX^{\mu}\partial_bX^{\nu}B_{\mu\nu}(X)+\alpha'\Phi(X)R_g\right\}= && (\mathbf{3}.73)\\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left\{\left(g^{ab}-i\varepsilon^{ab}\right)\partial_aX^{\mu}\partial_bX^{\nu}\left(G_{\mu\nu}(X)+B_{\mu\nu}(X)\right)+\alpha'\Phi(X)R_g\right\} && (\mathbf{3}.74)\end{aligned}$$

Während $\left(g^{ab}-i\varepsilon^{ab}\right)$ als Grundlage für ein hermitisches Skalarprodukt für kovariante Worldsheet-Vektoren dienen kann, ist $(G_{\mu\nu}(X)+B_{\mu\nu}(X))$ vorerst nicht dazu geeignet. Macht man jedoch eine **analytische Fortsetzung** $B\to iB$ der Partitionsfunktion, wie sie auch später für die Schwinger-Methode noch benötigt wird (siehe Abschnitt 4.1.3 auf Seite 44), so wird auch diese Kombination zu einem hermiteschen Ausdruck. Man könnte also speziell für Raumzeit-kontravariante und Worldsheet-kovariante Vektorfelder $\psi^{\mu}_a,\phi^{\nu}_b$ folgendes Skalarprodukt definieren

$$(\psi,\phi)\equiv\int d^2\sigma\sqrt{g}\left\{\left(\psi^{\mu}_a\right)^*\left(g^{ab}-i\varepsilon^{ab}\right)\left(G_{\mu\nu}+iB_{\mu\nu}\right)\phi^{\nu}_b\right\} \qquad (\mathbf{3}.75)$$

womit man die klassische Wirkung schreiben könnte als

$$S_p[X,g]=\frac{1}{4\pi\alpha'}\left((\partial X,\partial X)+\int d^2\sigma\sqrt{g}\alpha'\Phi(X)R_g\right) \qquad (\mathbf{3}.76)$$

Das führt uns jedoch zu weit weg. Was uns viel mehr interessiert ist ein eventueller Zusammenhang zwischen D_a und $\nabla_{H\mu}$. Zur Erinnerung: ohne analytische Fortsetzung gilt

$$\Gamma_H{}^{\alpha}_{\mu\beta}\equiv\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}+\frac{1}{2}H^{\alpha}_{\mu\beta} \qquad (\mathbf{3}.77)$$

$$A_a{}^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\partial_a \bar{X}^\alpha - \frac{i}{2}\varepsilon_{ad}\partial^d \bar{X}^\alpha H^\mu_{\alpha\nu} \tag{3.78}$$

Diese Ausdrücke sind schwer in einen schönen Zusammenhang zu bringen:

$$D_a x^\mu = \partial_a x^\mu + \partial_a \bar{X}^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} x^\lambda - \frac{i}{2}\varepsilon_{ab}\partial^b \bar{X}^\alpha H^\mu_{\alpha\lambda} x^\lambda \overset{?}{\neq} \partial_a x^\mu + (g_{ab} - i\varepsilon_{ab})\,\partial^b \bar{X}^\alpha \Gamma_H{}^\mu_{\alpha\lambda} x^\lambda \tag{3.79}$$

Doch auch hier schafft die eben schon herangezogene analytische Fortsetzung $B \to iB$ (und damit auch $H \to iH$) Abhilfe, denn Konnexion und Eichfeld werden damit zu

$$\Gamma_H{}^\alpha_{\mu\beta} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \frac{i}{2} H^\alpha_{\mu\beta} \tag{3.80}$$

$$A_a{}^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\partial_a \bar{X}^\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_{ad}\partial^d \bar{X}^\alpha H^\mu_{\alpha\nu} \tag{3.81}$$

so daß

$$D_a x^\mu = \partial_a x^\mu + \partial_a \bar{X}^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} x^\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\partial^b \bar{X}^\alpha H^\mu_{\alpha\lambda} x^\lambda = \partial_a x^\mu + \Re\left((g_{ab} - i\varepsilon_{ab})\,\partial^b \bar{X}^\alpha \Gamma_H{}^\mu_{\alpha\lambda} x^\lambda\right) \tag{3.82}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D_a x^\mu = \Re\left((g_{ab} - i\varepsilon_{ab})\,\partial^b \bar{X}^\alpha \nabla_{H\alpha} x^\mu\right)} \tag{3.83}$$

Man kann also die Raumzeit-kovariante Worldsheet-Ableitung als Realteil einer Art Projektion der neuen Raumzeit-kovarianten Ableitung sehen. Damit wird z.B. die rechte Seite von

$$\frac{1}{2}\alpha' R_g \nabla_{H\nu} \Phi^{,\mu} = \nabla_{H\nu} D^a \partial_a \bar{X}^\mu \tag{3.84}$$

zu

$$\nabla_{H\nu} D^a \partial_a \bar{X}^\mu = \Re\left(\left(g^{ab} - i\varepsilon^{ab}\right)\left(\partial_b \bar{X}^\alpha \nabla_{H\nu} \nabla_{H\alpha} \partial_a \bar{X}^\mu\right)\right) \tag{3.85}$$

Es wäre noch eine interessante Aufgabe, diese Ergebnisse weitergehend zu interpretieren, insbesondere die Rolle des Dilatonterms. Wir wollen es aber dabei belassen[2].

[2] Die Ähnlichkeit von Feldstärke und Inhomogenität wirft außerdem noch die Frage auf, ob man letztere auch (wie die Feldstärke) ausschliesslich durch das Eichfeld ausdrücken kann. Diese Frage läßt sich jedoch bereits verneinen, wenn man den vereinfachten Fall ohne Axion- und Dilatonfeld betrachtet. Die Inhomogenität und das Eichfeld reduzieren sich dann zu

$$C^\mu_\nu = -\partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \left(R^\mu_{\alpha\nu\beta}\right) \qquad A_a{}^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\partial_a \bar{X}^\alpha$$

Zuerst mal eine Sammlung von Gleichungen

$$\begin{aligned}
R^\mu_{\alpha\nu\beta} &= \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\nu,\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \\
\Rightarrow C^\mu_\nu &= -\partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\nu,\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\right) \\
A_a{}^\mu{}_\lambda A^{a\lambda}{}_\nu &= \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} = \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \\
\nabla^a A_a{}^\mu{}_\nu &= \Gamma^\mu_{\alpha\nu,\beta}\partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta + \Gamma^\mu_{\gamma\nu} \underbrace{\Box_h \bar{X}^\gamma}_{-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta} = \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \left(\Gamma^\mu_{\alpha\nu,\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right)
\end{aligned}$$

Damit ist

$$C^\mu_\nu = -A_a{}^\mu{}_\lambda A^{a\lambda}{}_\nu + \nabla^a A_a{}^\mu{}_\nu - \partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu}$$

Der letzte Term ist nicht mehr durch das Eichfeld ausdrückbar. Vergleiche noch mit dem Ausdruck der Feldstärke:

$$F_{ab}{}^\mu{}_\nu = 2\nabla_{[a}A_{b]} + [A_a, A_b] \quad \clubsuit$$

Kapitel 4

Auf der Suche nach dem Born-Infeld-Gegenstück

Wir beschäftigen uns im folgenden wieder mit der Frage nach der Existenz einer exakten (in allen Ordnungen in α') effektiven Wirkung für die Hintergrundfelder auf Baumgraphen-Niveau unter bestimmten Nebenbedingungen an die Hintergrundfelder. Für das an die Enden des offenen Strings koppelnde Eichfeld A_μ gibt es wie gesagt unter der Nebenbedingung einer konstanten Feldstärke $F_{\mu\nu}$ eine solche effektive Wirkung, die Born-Infeld-Wirkung (siehe Abschnitt 1.4 auf Seite 13).

Wenn man als Ausgangspunkt für die Untersuchung den Baumgraphen-Anteil (Wordsheet mit Sphären-Topologie) der von Fradkin und Tseytlin definierten effektive Wirkung nimmt (**1**.35)

$$S^{(0)}_{eff}[G,B,\Phi] = \int \mathrm{D}X\,\Delta_{FP}e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left(g^{ab}\partial_a X^\mu G_{\mu\nu}(X)\partial_b X^\nu - i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X)+\alpha'\Phi(X)R_g\right)} \qquad (\mathbf{1}.35{=}\mathbf{4}.1)$$

so ist die Zielsetzung klar. Wir müssen nach Bedingungen für die Hintergrundfelder suchen, für die dieses Integral einen geschlossenen Ausdruck (bis auf eine eventuell verbleibende und gewünschte Integration über die Raumzeit) ergibt. Es gibt nicht viele Möglichkeiten, ein Pfadintegral analytisch zu berechnen. An erster Stelle ist natürlich das Gauß-Integral zu nennen.

Das Gauß-Integral haben wir bereits in Kapitel 2 betrachtet. Dort haben wir es aber als Näherung betrachtet (Vernachlässigung höherer Terme in α') und anschließend nur die Weyl-Variation der entstehenden Funktionaldeterminante, und nicht die Determinante selbst berechnet. Bricht die Entwicklung der Stringwirkung im Exponenten der obigen effektiven Wirkung nach der zweiten Ordnung in x ab, so nimmt die effektive Wirkung, die ja schlicht die Partitionsfunktion als Funktional der Hintergrundfelder ist, nach (**2**.57) auf Seite 20 die folgende Form an:

$$S^{(0)}_{eff}[G,B,\Phi] = \Delta_{FP}e^{-S_p[\bar{X}]}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,O}} \qquad (\mathbf{4}.2)$$

Wir erinnern uns, daß die Terme $\mathcal{O}(\alpha')$ in (**2**.57) von den Termen $\mathcal{O}(x^3)$ aus der Entwicklung der Wirkung herrührten, welche bei uns nach Annahme verschwinden. Da wir jedoch momentan innerhalb dieser $\mathcal{O}(x^3)$-Näherung exakt in α' rechnen wollen, werden wir α'-Terme in O und S_p jetzt nicht vernachlässigen! Im nächsten Abschnitt werden wir versuchen, für die Determinante mit Hilfe einer Methode von Schwinger, einen geschlossenen Ausdruck zu finden. Die daraus folgende effektive Wirkung wird dann in Abschnitt 4.2 auf Seite 56 betrachtet. Anschließend werden wir untersuchen, was die während der Anwendung der Schwinger-Methode geforderten Bedingungen für Auswirkungen auf die Hintergrundfelder haben, um uns im darauffolgenden Abschnitt mit der Frage zu beschäftigen, ob es überhaupt möglich ist, zusätzliche vernünftige Bedingungen an die Hintergrundfelder zu stellen, so daß das Gauß-Integral keine Näherung darstellt, sondern exakt (in allen Ordnungen in α') ist.

Dem folgt dann ein abschließender Abschnitt auf Seite 60 mit kurzen Betrachtungen von alternativen Möglichkeiten, einen geschlossenen Ausdruck für das Pfadintegral in (**1**.35=**4**.1) zu erhalten.

4.1 Die Schwinger-Methode

Ziel dieses Abschnitts ist es, einen geschlossenen Ausdruck für die Funktionaldeterminante des Fluktuationsoperators (inklusive dem Dilatonterm) zu finden. Wir werden dabei ab 4.1.2 eine Methode von Schwinger [Sch51] verwenden, wobei wir oft der Darstellung dieser Methode in [IZ, S.100ff] folgen aber viele nötige Erweiterungen aus [Sac94, S.36ff] übernehmen werden. Es wird jedoch auf eine selbstkonsistente Darstellung der Methode geachtet.

Betrachten wir einen positiv semidefiniten Differentialoperator (wie z.B. unseren Fluktuationsoperator von Seite 19, siehe auch Fußnote 7 auf Seite 22) der Form

$$O = -D^2 + C \tag{4.3}$$
$$D_{a\ \beta}^{\ \alpha} = \delta^\alpha_\beta \nabla_a + A_{a\ \beta}^{\ \alpha} \tag{4.4}$$
$$D^{2\,\alpha}_{\ \ \beta} = D_{a\ \gamma}^{\ \alpha} D^{a\gamma}_{\ \ \beta} \tag{4.5}$$

Mögliche Nullmoden des Operators werden wir vorerst wieder außer acht lassen. Im Anhang D auf Seite 82 wird die Regularisierung der Determinante eines solchen Operators mittels der **verallgemeinerten ζ-Funktion** besprochen. Die für uns jetzt wesentlichen Gleichungen sind

$$\ln\det O = -\zeta_0'(s)\Big|_{s=0} \tag{4.6}$$

und

$$\zeta_O(s) = \int d^2\sigma \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1} \operatorname{tr} K(\sigma,\sigma;t) \tag{4.7}$$

wobei die Spur tr nur über die diskreten Indizes von K geht und K der **Heat-Kernel** ist

$$K(\sigma,\sigma';t)^\alpha_\beta \equiv <\sigma| \left(e^{-t\hat{O}}\right)^\alpha_\beta |\sigma'> \overset{\text{formal}}{=} \left(e^{-tO}\right)^\alpha_\beta \delta(\sigma-\sigma') \tag{4.8}$$

Hier wurde implizit ein abstrakter Hilbertraum mit Vektoren $|\psi>$und Skalarprodukt

$$<\psi|\phi> \equiv \int d^2\sigma \psi^*(\sigma)\phi(\sigma) \tag{4.9}$$

definiert. Der Faktor $\sqrt{g}$ des üblichen Integralmaßes wurde bewußt weggelassen. Wenn der gesamte Ausdruck also ein Skalar ist, dann sind ψ und ϕ keine Skalare, sondern Skalardichten. Ebenso ist dann $K^\alpha_\beta(\sigma,\sigma';t)$ eine Tensordichte. $|\sigma>$ bezeichnet wie üblich einen Eigenvektor des abstrakten Ortsoperators $\hat{\sigma}$. Im folgenden werden wir stets die Operatoren des abstrakten Hilbertraums mit einem Dach$\hat{\ }$ kennzeichnen, während Operatoren ohne Dach$\hat{\ }$ Differentialoperatoren (also die Operatoren in der Ortsdarstellung) bezeichnen sollen. Es ist also

$$<\sigma|\hat{\sigma}|\psi> = \sigma\cdot\psi(\sigma) \tag{4.10}$$
$$<\sigma|\hat{O}|\psi> = O\psi(\sigma) \tag{4.11}$$
$$<\sigma|\sigma'> = \delta(\sigma-\sigma') \tag{4.12}$$

Des weiteren erfüllt der Heat-Kernel die **Wärmeleitungsgleichung** (heat equation)

$$\partial_t K(\sigma,\sigma';t) = -O(\sigma)K(\sigma,\sigma';t) \tag{4.13}$$

oder mit

$$\hat{K}(t) \equiv e^{-t\hat{O}} \tag{4.14}$$
$$\partial_t \hat{K}(t) = -\hat{O}\hat{K}(t) \tag{4.15}$$

Nach der Definition von K (4.8) sind die zugehörigen Randbedingungen

$$\lim_{t\to 0} K(\sigma,\sigma';t) = \delta(\sigma-\sigma') \tag{4.16}$$
$$\lim_{t\to\infty} K(\sigma,\sigma';t) = 0 \tag{4.17}$$

4.1.1 Überführung der Wärmeleitungs- in eine Schrödinger-ähnliche Gleichung

Zur exakten Berechnung der Funktionaldeterminante ist also nach (**4**.6) und (**4**.7) der Heat Kernel von besonderer Bedeutung. Um bei der Berechnung des Kernels Standardmethoden aus der Quantenmechanik verwenden zu können, werden wir nun die Wärmeleitungsgleichung in eine Gleichung überführen, welche die Struktur einer Schrödingergleichung hat. Dazu setzen wir den in t reell analytischen Kernel $\hat{K}(t) \equiv e^{-t\hat{O}}$ ins Komplexe fort

$$\hat{K}(z) \equiv e^{-z\hat{O}} \quad z \in \mathbf{C} \tag{4.18}$$

und definieren

$$\hat{\tilde{U}}(\tau) \equiv \hat{K}(i\tau) = e^{-i\tau\hat{O}} \quad \tau \in \mathbf{R} \tag{4.19}$$

$$\tilde{U}(\sigma,\sigma';\tau) \equiv <\sigma|e^{-i\tau\hat{O}}|\sigma'> \tag{4.20}$$

Beachte: sowohl $\hat{\tilde{U}}(\tau)$ als auch $\tilde{U}(\sigma,\sigma';\tau)$ besitzen noch diskrete Indizes.
Für die neu definierten Größen gilt

$$i\partial_\tau\hat{\tilde{U}}(\tau) = \hat{O}\hat{\tilde{U}}(\tau) \tag{4.21}$$

$$i\partial_\tau\tilde{U}(\sigma,\sigma';\tau) = O\tilde{U}(\sigma,\sigma';\tau) \tag{4.22}$$

Diese Gleichung sieht nun einer quantenmechanischen Schrödingergleichung ähnlich, wenn man den Parameter τ als quantenmechanische Zeit auffaßt. Genau das ist die Idee bei der Methode von **Schwinger**. (Beachte: hätte man statt der Fortsetzung ins Komplexe die Gleichung (**4**.15) einfach mit i multipliziert, wäre der entstehende Differentialoperator auf der rechten Seite nicht mehr hermitesch gewesen, was von einem Hamiltonoperator verlangt wird. Zur Hermitizität von O kommen wir in Abschnitt 4.1.3 auf Seite 44. $\tilde{U}$ ist vorerst nur für reelle Werte von τ definiert und wird auch nur für solche berechnet. Nach der Berechnung von $\tilde{U}$ können wir dann durch erneute analytische Fortsetzung ins Komplexe (dieses Mal von $\tilde{U}$), das Ergebnis für K gewinnen. Das funktioniert, da die analytische Fortsetzung von reell analytischen Funktionen eindeutig ist.

4.1.2 Schwinger-Methode

Wir wollen nun basierend auf (**4**.21) ein quantenmechanisches System konstruieren, welches die Verwendung des üblichen Hamiltonformalismus' ermöglicht. Wir gehen dabei vor wie [IZ, S.100ff] bzw. [Sac94, S.36ff]. Da unser Operator O mit diskreten Indizes ausgestattet ist und eigentlich auf die Quantenfluktuationen $x^\mu(\sigma)$ (also auf Raumzeit-Vektorfelder, für infinitesimale x) wirkt, wollen wir unseren Hilbertraum noch ein wenig erweitern und bilden noch das direkte Produkt mit dem Tangentialraum der Raumzeit-Mannigfaltigkeit (diskrete Indizes). Um ein von $\sqrt{g}$ freies Skalarprodukt benutzen zu können (siehe dazu später auch die Fußnote 1 zur Einführung des Impulsoperators), definieren wir als Zustandsfunktionen

$$\tilde{x}^\mu(\sigma) \equiv g^{\frac{1}{4}}x^\mu(\sigma) \tag{4.23}$$

und als Skalarprodukt

$$<\tilde{x}|\tilde{y}> \equiv \int d^2\sigma\tilde{x}^\mu(\sigma)^* G_{\mu\nu}(\bar{X})\tilde{y}^\nu(\sigma) = \int d^2\sigma\sqrt{g}x^\mu(\sigma)^* G_{\mu\nu}(\bar{X})y^\nu(\sigma) \tag{4.24}$$

x^μ und y^ν sind unsere Quantenfluktationen. $\tilde{x}^\mu$ und $\tilde{y}^\nu$ sind also Tensordichten. Die komplexe Konjugation $x^\mu(\sigma)^*$ bei der Definition des Skalarprodukts scheint für die reellen Quantenfluktuationen sinnlos zu sein. Sie wird jedoch bedeutend bei der späteren Untersuchung der Hermitizität des komplexen Impulsoperators π_a, den wir definieren als[1]

$$\pi_a{}^\alpha_\beta \equiv \frac{1}{i}\left(\delta^\alpha_\beta\partial_a + A_a{}^\alpha_\beta\right) \tag{4.25}$$

$$\text{oder einfach} \quad \pi_a \equiv \frac{1}{i}\left(\partial_a + A_a\right) \tag{4.26}$$

[1] Es gibt drei Punkte, die bei der Definition (**4**.26) seltsam anmuten könnten.
Zum ersten hat man üblicherweise für ein reelles Eichfeld A_a einen kanonisch konjugierten Impuls der Form $\pi_a \equiv \frac{1}{i}\partial_a + A_a$. Das sichert die Hermitizität von π_a, da die partielle Ableitung bei partieller Integration ein negatives Vorzeichen erhält, welches durch die komplexe Konjugation wieder wettgemacht wird, während A_a einfach unberührt stehenbleibt. Unser Eichfeld ist jedoch nichtabelsch und in den inneren Indizes nicht symmetrisch, außerdem erhält man bei partieller Integration auch noch einen Beitrag von der Ableitung

Die Kommutatoren sind wie üblich

$$[\sigma^b, \pi_a] = i\delta_a^b \tag{4.27}$$
$$[\pi_a, \pi_b]^\alpha_\beta = -F_{ab}{}^\alpha_\beta \tag{4.28}$$
$$\left[\sigma^a, \sigma^b\right] = 0 \tag{4.29}$$

Die inneren Indizes von σ sind hier nicht angegeben und bilden einfach eine Einheitsmatrix. Das ändert sich jedoch beim Übergang ins Heisenberg-Bild! Da Kommutatoren vom gewählten Bild unabhängig sind, ist es wichtig, daß wir weitere Information, die wir aus der Ortsdarstellung im Schrödingerbild haben, durch Kommutatoren ausdrücken. So gilt zum Beispiel trivialerweise noch

$$[\sigma^c, F_{ab}] = 0 \tag{4.30}$$
$$[\sigma^c, C] = 0 \tag{4.31}$$

Im Heisenbergbild wären diese Relationen nicht mehr so offensichtlich. Der Vollständigkeit halber wollen wir auch noch auf die später geforderten Nebenbedingungen für F_{ab} und C in (**4**.94) und (**4**.98) auf Seite 48, sowie den daraus folgenden Kommutator (**4**.101) hinweisen.

Es ist ebenfalls wichtig, sich über die Natur der Ortseigenfunktionen und -Operatoren im Klaren zu sein. Oben haben wir erwähnt, daß der Ortsoperator innere Indizes besitzt, die eine Einheitsmatrix bilden. Mit anderen Worten, der Ortsoperator soll nur seine alte Funktion ausüben und die Indizes des Tangentialraumes nicht berühren, ist also ein Tensorprodukt aus der Identität im Tangentialraum und dem alten Ortsoperator (siehe (**4**.10)):

$$\hat{\sigma}^a \equiv \mathbf{1} \otimes \hat{\sigma}^a_{\text{alt}} \tag{4.32}$$

Beim Wechsel in das Heisenberg-Bild wird die Identität im Allgemeinen zu einer beliebigen Matrix. Um möglichst viele Eigenschaften des Ortsoperators in den erweiterten Hilbertraum zu übernehmen, ist es naheliegend, ihn wie folgt zu definieren

$$\boxed{|\sigma> \equiv e_{(\alpha_\sigma)} \otimes |\sigma>_{\text{alt}}} \tag{4.33}$$

wobei $e_{(\alpha)}$ die orthonormalen Basisvektoren des Tangentialraums sind, bzgl. derer wir bisher die Komponenten von Tangentialvektoren angegeben haben. Dem Ortseigenvektor $|\sigma>$ ist jetzt sowohl der kontinuierliche Index σ, wie auch ein diskreter Index α_σ zugeordnet. Diese Definition ist insofern problematisch, als der Wert von α_σ ja nicht abhängig ist von σ. Man sollte sich deshalb σ als Doppelindex vorstellen: $\sigma = (\sigma, \alpha)$, und hätte dafür natürlich besser ein neues Symbol gewählt. In den meisten Fällen, kann diese Kennzeichnung aber nicht zu Mißverständnissen führen. Erst wenn man zwei Vektoren mit dem selben σ aber unterschiedlichem α betrachten will, wird es problematisch. Wir werden später eventuell darauf zurückkommen. Die Ortsdarstellung der Ortseigenfunktionen ist damit

$$< \sigma|\sigma'>= \delta^{\alpha_\sigma}_{\alpha_{\sigma'}} \delta(\sigma - \sigma') \tag{4.34}$$

---

der Raumzeit-Metrik. All dieses führt dazu, daß der in (**4**.26) definierte Impuls hermitesch ist, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden.

Zum zweiten kann man sich fragen, wieso man denn nicht einfach die Worldsheet-kovariante Ableitung ∇_a statt der partiellen Ableitung ∂_a verwendet. Zwar sind die ursprünglichen Quantenfluktuationen Worldsheet-Skalare, doch mit x liegen auch z.B. $\pi_b x$ oder $\sigma^b x$ im Hilbertraum, für die sich die kovariante Ableitung nicht zu einer partiellen Ableitung reduzieren würde. Die kovariante Ableitung im Impuls wäre wünschenswert, da wir unseren Operator O und späteren Hamiltonoperator (**4**.39) bzw. (**4**.40) als Quadrat des Impulses schreiben wollen, was mit der kovarianten Ableitung einfacher ist als mit der partiellen. π_a würde dann nämlich bis auf einen Faktor $-i$ mit unserem Ableitungsoperator D_a übereinstimmen. Außerdem wäre es dann naheliegend, keine Tensordichten $\tilde{x}$ einzuführen, sondern stattdessen das Skalarprodukt mit $\sqrt{g}$ zu definieren, um die kovariante Ableitung partiell integrieren zu können. Eben dieses funktioniert aber nur, wenn das gesamte Skalarprodukt ein Worldsheet-Skalar ist. Wenn man dann jedoch die Hermitizität von π_a untersucht ($< x|\pi_a y > \stackrel{?}{=} < \pi_a x|y >$ für alle Elemente x,y des Hilbertraums, die also auch Worldsheet Indizes tragen können), ist dies nicht der Fall! Die partielle Integration führt dann zu unschönen freistehenden Christoffelsymbolen usw.

Zum dritten ist es verwunderlich, daß man, wenn man schon diese $\tilde{x}$ einführt und die partielle Ableitung verwendet, den Impulsoperator nicht als $\tilde{\pi}_a \equiv \frac{1}{i} g^{\frac{1}{4}} (\partial_a + A_a) g^{-\frac{1}{4}}$einführt. So wäre $\tilde{\pi}_a \tilde{x}^\mu = \frac{1}{i} g^{\frac{1}{4}} (\partial_a + A_a) x^\mu$ und die partielle Ableitung würden direkt auf x statt $\tilde{x}$ wirken und danach aus dem Ergebnis wieder eine Tensordichte machen. Mit eben dieser Begründung werden wir später die Form von H in (**4**.40) rechtfertigen. Wenn jedoch π, wie es in (**4**.26) definiert ist, selbstadjungiert ist (was wir später zeigen werden), so folgt, daß $\tilde{\pi}$ **nicht** selbstadjungiert sein kann. Denn dann gilt.

$$< \tilde{x}|g^{\frac{1}{4}} \pi_a g^{-\frac{1}{4}} \tilde{y} >=< g^{\frac{1}{4}} \tilde{x}|\pi_a g^{-\frac{1}{4}} \tilde{y} >=< \pi_a g^{\frac{1}{4}} \tilde{x}|g^{-\frac{1}{4}} \tilde{y} >=< g^{-\frac{1}{4}} \pi_a g^{\frac{1}{4}} \tilde{x}|\tilde{y} > \quad \clubsuit$$

Wenn wir den diskreten Index des Ortseigenvektors explizit nennen wollen, oder aus irgendeinem Grund sein Symbol ändern wollen, so schreiben wir

$$|\sigma>\equiv|\sigma,\alpha_\sigma> \tag{4.35}$$

Soviel zur Nomenklatur. Kommen wir kurz wieder auf den in (**4**.26) definierten Impulsoperator π_a zu sprechen. Vergleiche den neu definierten Impuls mit unserer kovarianten Ableitung

$$D_a = \nabla_a + A_a \tag{4.36}$$

$$[D_a, D_b]^\alpha_\beta = F_{ab}{}^\alpha_\beta \tag{4.37}$$

Obwohl die kovariante Ableitung D die Worldsheet-kovariante Ableitung ∇ enthält, π dagegen nur die partielle Ableitung, stimmen die Kommutatoren bis auf das Vorzeichen überein. Das ist jedoch nur dann der Fall, wenn die kovariante Ableitung auf Worldsheet-Skalare wirkt, für die zwei Worldsheet-kovariante Ableitungen noch kommutieren.

Der von uns betrachtete Fluktuationsoperator läßt sich also unter Verwendung von (**E**.11) aus dem Anhang folgendermaßen durch den Impulsoperator ausdrücken

$$D^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}}\pi_a\sqrt{g}g^{ab}\pi_b \tag{4.38}$$

$$O = \frac{1}{\sqrt{g}}\pi_a\sqrt{g}g^{ab}\pi_b + C \tag{4.39}$$

O ist als Hamiltonoperator noch nicht perfekt, da er das Wesen der Zustandsvektoren (Skalardichten) nicht unverändert läßt. Deswegen definieren wir unseren Hamiltonoperator H

$$H(\sigma,\pi) \equiv (g(\sigma))^{-1/4}\,\pi_a\sqrt{g(\sigma)}g^{ab}(\sigma)\pi_b\,(g(\sigma))^{-1/4} + C(\sigma) = g^{1/4}Og^{-1/4} \tag{4.40}$$

Der einzige Unterschied zu der Form in [Sac94] liegt in der Mitnahme der Inhomogenität C. Spätere Unterschiede um einen Faktor i rühren daher, daß unser Eichpotential bei der Definition von π_a mit einem Faktor i eingeht. Mit dieser Definition und mit dem Skalarprodukt (**4**.24), kann man den quadratischen Term $S_2[\bar{X},x,x]$ der Entwicklung der klassischen Wirkung (siehe (**2**.47), Seite 19) schreiben als

$$S_2[\bar{X},x,x] = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}x^\lambda G_{\lambda\gamma}O^\gamma_\rho x^\rho = \frac{1}{2\pi\alpha'} < \tilde{x}|H\tilde{x}> \tag{4.41}$$

Multiplizieren wir also (**4**.21) von links mit $(g)^{1/4}$, von rechts mit $(g)^{-1/4}$ und definieren schließlich den **Evolutionsoperator**

$$\hat{U}(\tau) \equiv g^{1/4}\hat{\hat{U}}(\tau)g^{-1/4} = e^{-i\tau\hat{H}} \tag{4.42}$$

$$\text{bzw. } U(\sigma,\sigma';\tau)^{\alpha_\sigma}_{\alpha_{\sigma'}} \equiv <\sigma|\hat{U}(\tau)|\sigma'> \tag{4.43}$$

Beachte die diskreten Indizes, die $U(\sigma,\sigma';\tau)$ in (**4**.43) trägt. Der Grund dafür ist die Definition (**4**.33). Wir werden die diskreten Raumzeit-Indizes in der Regel aber auch auf der linken Seite unterdrücken (wie z.B. in (**4**.45)).

Mit der Definition (**4**.42) ergibt sich nun endlich die erwünschte Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_\tau\hat{U}(\tau) = \hat{H}\hat{U}(\tau) \tag{4.44}$$

$$\text{bzw. } i\partial_\tau U(\sigma,\sigma';\tau) = HU(\sigma,\sigma';\tau) \tag{4.45}$$

$$\text{bzw. } i\partial_\tau <\sigma|\hat{U}(\tau)|\sigma'> = <\sigma|\hat{H}\hat{U}(\tau)|\sigma'> \tag{4.46}$$

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man diese Gleichung integrieren und einen geschlossenenen Ausdruck für $U(\tau)$ finden. Durch abermalige Fortsetzung ins Komplexe erhalten wir so auch eine Lösung für $K(t)$. Da wir für die Berechnung der Determinante über die $\zeta-$ Funktion nach (4.6) nur $K(\sigma,\sigma;t)$ suchen (also mit zwei gleichen Argumenten! siehe (**4**.7)), reicht uns also auch auf der "Schrödinger-Seite" ein Ausdruck für $U(\sigma,\sigma;\tau)$. Wir werden dennoch der Vollständigkeit halber $U(\sigma,\sigma';\tau)$ und $K(\sigma,\sigma';t)$ berechnen, und erst im Anschluß die Argumente gleichsetzen.

Um den Hamiltonformalismus in seiner vollen Schönheit (und vor allem ohne weiter nachdenken zu müssen) anwenden zu können, müssen wir erst einmal die Selbstadjungiertheit (Hermitizität) der Operatoren $\hat{\pi}_a$ und $\hat{H}$ zeigen (die Selbstadjungiert von $\hat{\sigma}$ ist offensichtlich). Dies wird die Aufgabe des nächsten Abschnitts sein. Nachdem wir dann im darauffolgenden übernächsten Abschnitt vom Schrödinger-Bild in das Heisenberg-Bild wechseln, widmen wir uns dann in Abschnitt 4.1.5 auf Seite 47 endlich der eigentlichen Berechnung von $U(\sigma,\sigma';\tau)$ bzw. $K(\sigma,\sigma';t)$.

4.1.3 Zur Selbstadjungiertheit (Hermitizität) von $\hat{\pi}$ und $\hat{H}$, bzw. Symmetrie von O

Mehrfach haben wir bereits die Symmetrie von O und auch D^2 erwähnt und benutzt. Diese hängt direkt zusammen mit der Hermitizität von $\hat{H}$ und $\hat{\pi}$. Der Fluktuationsoperator O ist genau dann symmetrisch im Sinne von (**2**.42) auf Seite 18, wenn $\hat{H}$ symmetrisch bezüglich des oben eingeführten Skalarprodukts (**4**.24) ist. Damit der Hamiltonoperator jedoch gleichzeitig symmetrisch und hermitesch sein kann, muß er zwangsläufig reell sein. Nun tauchen aber in O (siehe (**2**.43)-(**2**.46), Seite 19) einige imaginäre Terme auf, und zwar immer zusammen mit einem in der Axion-Feldstärke H linearen Term. Es ist also naheliegend (wie auch schon bei der Raumzeit-Metrik bei der Euklidisierung im Anhang, Abschnitt A.2 auf Seite 74 geschehen), eine **erneute analytische Fortsetzung** des Pfadintegrals auszuführen. Dieses Mal betrachten wir einfach die effektive Wirkung $S^{(0)}_{eff}[G,B,\Phi]$ (siehe (**1**.35=**4**.1)), die ja ein Funktional der Hintergrundfelder ist. Wieder unter der Annahme der reellen Analytizität von $S^{(0)}_{eff}$ bzgl. B ersetzen wir B durch iB. Somit können wir in allen bisher gewonnenen Ausdrücken B durch iB bzw. H durch iH ersetzen. Auch die symetrische Matrix C^μ_ν wird so reell und damit hermitesch.

$$C^\dagger = C \quad \text{für fortgesetztes } B \tag{4.47}$$

In der klassischen euklidischen Wirkung (siehe z.B. (**A**.67), Seite 74) hebt diese analytische Fortsetzung übrigens genau den durch die Worldsheet-Euklidisierung entstandenen Vorfaktor $-i$ auf. Nach durchgeführter Rechnung können wir das Ergebnis dann wieder zurück-fortsetzen.

Kommen wir nun zum eigentlichen Beweis der Hermitizität der Operatoren $\hat{\pi}_a$ und $\hat{H}$. Beginnen wir mit dem Impulsoperator. Wir betrachten das Skalarprodukt von oben

$$<\tilde{x}|\tilde{y}>\equiv \int d^2\sigma \tilde{x}^\mu(\sigma)^* G_{\mu\nu}(\bar{X})\tilde{y}^v(\sigma) \tag{4.24=4.48}$$

und betrachten die Frage

$$<\tilde{x}|\pi_a\tilde{y}> \overset{?}{=} <\pi_a\tilde{x}|\tilde{y}> \tag{4.49}$$

Beginnen wir auf der linken Seite

$$\begin{aligned} <\tilde{x}|\pi_a\tilde{y}> &\overset{(4.26)}{=} \int d^2\sigma(\tilde{x}^\mu)^* G_{\mu\nu}\frac{1}{i}\left(\partial_a + A_a\right)\tilde{y}^v = & (4.50)\\ &\overset{p.I.}{=} \int d^2\sigma\left(\left(-\frac{1}{i}\partial_a(\tilde{x}^\mu)^* G_{\mu\nu}\tilde{y}^v - \frac{1}{i}(\tilde{x}^\mu)^*\partial_a G_{\mu\nu}\tilde{y}^v\right) + \frac{1}{i}(\tilde{x}^\mu)^* G_{\mu\nu}A_a{}^\nu{}_\lambda\tilde{y}^\lambda\right) & (4.51)\end{aligned}$$

Verwenden wir jetzt die Definition von A_a aus (**2**.46) auf Seite 19 (allerdings mit analytisch fortgesetztem B bzw. H!)

$$A_a{}^\nu{}_\lambda = \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}\partial_a\bar{X}^\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\partial^b\bar{X}^\alpha H^\nu_{\alpha\lambda} \quad \text{fortgesetztes } H! \tag{4.52}$$

und ferner

$$\partial_a G_{\mu\nu}(\bar{X}) = G_{\mu\nu,\alpha}\partial_a\bar{X}^\alpha = \left(\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}G_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}G_{\mu\lambda}\right)\partial_a\bar{X}^\alpha \tag{4.53}$$

Außerdem ziehen wir die Vorfaktoren $\pm\frac{1}{i}$ mit in die komplexe Konjugation von $\tilde{x}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} <\tilde{x}|\hat{\pi}_a\tilde{y}> &= \int d^2\sigma\left(\left((\frac{1}{i}\partial_a\tilde{x}^\mu)^* G_{\mu\nu}\tilde{y}^v + (\frac{1}{i}\tilde{x}^\mu)^*\left(\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}G_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}G_{\mu\lambda}\right)\partial_a\bar{X}^\alpha\tilde{y}^v\right) + \right.\\ &\left. - (\frac{1}{i}\tilde{x}^\mu)^* G_{\mu\nu}\left(\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}\partial_a\bar{X}^\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\partial^b\bar{X}^\alpha H^\nu_{\alpha\lambda}\right)\tilde{y}^\lambda\right) = \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$= \int d^2\sigma \left((\frac{1}{i}\partial_a \tilde{x}^\mu)^* G_{\mu\nu}\tilde{y}^v + (\frac{1}{i}\tilde{x}^\mu)^* \underbrace{\left(\partial_a \bar{X}^\alpha \Gamma^\rho_{\alpha\mu} G_{\rho\lambda} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\partial^b \bar{X}^\alpha H_{\mu\alpha\lambda}\right)}_{A_a{}^\rho{}_\mu G_{\rho\lambda}} \tilde{y}^\lambda \right) = \qquad (4.55)$$

$$= \int d^2\sigma \left(\frac{1}{i}\left(\delta^\rho_\mu \partial_a + A_a{}^\rho{}_\mu\right) \tilde{x}^\mu \right)^* G_{\rho\lambda}\tilde{y}^\lambda =< \pi_a \tilde{x}|\tilde{y} > \qquad (4.56)$$

was zu beweisen war.

Die Hermitizität von $H = g^{-1/4}\pi_a\sqrt{g}g^{ab}\pi_b g^{-1/4} + C$ zu zeigen ist nun ein Kinderspiel:

$$H^\dagger = \left(g^{-1/4}\right)^\dagger (\pi_b)^\dagger \left(\sqrt{g}g^{ab}\right)^\dagger (\pi_a)^\dagger \left(g^{-1/4}\right)^\dagger + C^\dagger = H \qquad (4.57)$$

Damit hätten wir diese Aufgabe erledigt.

Für die Feldstärke folgt aus der Hermitizität von π übrigens die Antihermitizität von F_{ab} :

$$F^\dagger_{ab} = (\pi_a\pi_b)^\dagger - (\pi_b\pi_a)^\dagger = \pi^\dagger_b\pi_a - \pi^\dagger_a\pi_b = F_{ba} \qquad (4.58)$$

Erwähnen wir als letztes noch, daß trivialerweise auch σ hermitesch bezüglich unseres Skalarproduktes ist und fassen noch einmal alle Ergebnisse zusammen:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma^{a\dagger} &= \sigma^a & (4.59)\\ \pi^\dagger_a &= \pi_a & (4.60)\\ H^\dagger &= H & (4.61)\\ C^\dagger &= C & (4.62)\\ F^\dagger_{ab} &= -F_{ab} & (4.63) \end{aligned}}$$

4.1.4 Schrödinger Bild → Heisenberg Bild

Wir befanden uns bisher im Schrödinger-Bild (die "physikalischen" Operatoren π und σ waren τ-unabhängig) und wollen nun in das Heisenberg-Bild wechseln. Da es im vorliegenden Fall leicht unklar wird, in welchem Bild man sich befindet, werden wir diesen Übergang sorgfältig durchführen. Zunächst versehen wir im folgenden alle Schrödinger-Größen mit einem Schrödinger-Index $_S$. Obwohl die bisher verwendeten Ortseigenvektoren $|\sigma >\equiv |\sigma >_S$ nicht von der Zeit abhängen, sind es trotzdem Vektoren im Schrödinger-Bild. Für die Heisenberg-Vektoren gilt[2]

$$\begin{aligned} |\sigma,\tau > &\equiv \hat{U}^\dagger(\tau) \mid \sigma >_S & (4.64)\\ |\sigma, 0 > &= |\sigma >_S & (4.65) \end{aligned}$$

[2]Die übliche Motivation für den Übergang ins Heisenberg-Bild ist, daß physikalische Zustände zeitunabhängig werden. Betrachte dazu die Schrödingergleichung

$$i\partial_\tau|\psi, t >_S= \hat{H}_S|\psi >_S$$

Wenn $\hat{H}$ nicht selbst zeitabhängig ist, folgt daraus

$$|\psi, \tau >_S= e^{-i\tau\hat{H}_S}|\psi, 0 >_S\equiv \hat{U}_S(\tau)|\psi, 0 >_S$$

Den zeitunabhängigen Vektor auf der rechten Seite will man nach dem Übergang als neuen Zustandsvektor erhalten. Daraus folgt die Transformation zwischen Vektoren im Heisenberg- und Schrödinger-Bild

$$\mid \psi >\equiv \hat{U}^\dagger_S(\tau)|\psi >_S$$

und zwar unabhängig davon, wie die Zeitabhängigkeit der Vektoren im einzelnen aussieht. Die Zeitabhängigkeit der physikalischen Zustandsvektoren (diejenigen, welche die Schrödingergleichung erfüllen) war nur Motivation für die Transformation. Daß $|\sigma >_S$ die Schrödingergleichung nicht erfüllt, ist der Grund, warum die Trafo (4.64) kontraintuitiv aussieht. Die Trafo der Operatoren (4.67) schließlich folgt bekanntermaßen aus der Forderung, daß der Erwartungswert in beiden Bildern derselbe ist

$$\begin{aligned} < \psi|\hat{A}|\phi > &= < \psi|_S\hat{U}_S(\tau)\hat{A}\hat{U}^\dagger_S(\tau)|\phi >_S\stackrel{!}{=}< \psi|_S\hat{A}_S|\phi_S >\\ \Rightarrow\quad \hat{A} &= \hat{U}^\dagger_S(\tau)\hat{A}_S\hat{U}_S(\tau)\\ \Rightarrow\quad \hat{U} &= \hat{U}_S \quad \clubsuit \end{aligned}$$

In der Bezeichnung $|\sigma,\tau>$ kann man τ mit dem diskreten Index von (**4**.35) auf Seite 43 verwechseln. Daß Symbol τ sei also für die quantenmechanische Zeit reserviert und wird nicht für Indizes verwendet werden. Wollen wir den diskreten Index zusätzlich kennzeichnen, schreiben wir analog zu (**4**.35)

$$|\sigma,\tau>=|\sigma,\alpha_\sigma,\tau> \tag{4.66}$$

Für die Operatoren gilt die Transformation

$$\hat{A}(\tau)\equiv\hat{U}^\dagger(\tau)\hat{A}_S\hat{U}(\tau) \tag{4.67}$$

[3]Verwenden wir jetzt also in der Schrödingergleichung (**4**.45) bzw. (**4**.46)

$$i\partial_\tau U(\sigma,\sigma';\tau)=i\partial_\tau<\sigma|_S\hat{U}(\tau)|\sigma'>_S=<\sigma|_S\hat{H}_S\hat{U}(\tau)|\sigma'>_S \tag{4.68}$$

die Gleichungen (**4**.64) und (**4**.65), so erhalten wir

$$i\partial_\tau U(\sigma,\sigma';\tau)=i\partial_\tau<\sigma,\tau|\sigma',0>=<\sigma,\tau|\hat{H}|\sigma',0> \tag{4.69}$$

Beachte, daß für $\hat{H}$ (ebenso wie für $\hat{U}$) gilt:

$$\hat{H}=\hat{H}_S \tag{4.70}$$

Sei nun $\hat{H}(-,-)$ die operatorwertige Funktion, die abbildet

$$\hat{H}(-,-):\ (\hat{\sigma}_S,\hat{\pi}_S)\mapsto\hat{H}_S=\hat{H} \tag{4.71}$$

Ist $\hat{H}(-,-)$ analytisch in den Argumenten (also in einer Potenzreihe mit Entwicklungskoeffizienten c_{mnlk} entwickelbar), so ergibt sich beim Übergang vom Schrödinger- ins Heisenbergbild

$$\hat{H}(\hat{\sigma}_S,\hat{\pi}_S)\quad\rightarrow\quad\hat{U}^\dagger\hat{H}(\hat{\sigma}_S,\hat{\pi}_S)\hat{U}=\hat{U}^\dagger\sum_{m,n,l,k}c_{mnlk}\cdot(\hat{\sigma}^1_S)^m(\hat{\sigma}^2_S)^n(\hat{\pi}^S_1)^l(\hat{\pi}^S_2)^k\hat{U}^\dagger= \tag{4.72}$$

$$=\sum_{m,n,l,k}c_{mnlk}\cdot\left(\hat{\sigma}^1(\tau)\right)^m\left(\hat{\sigma}^2(\tau)\right)^n\left(\hat{\pi}_1(\tau)\right)^l\left(\hat{\pi}_2(\tau)\right)^k=\hat{H}(\hat{\sigma}(\tau),\hat{\pi}(\tau)) \tag{4.73}$$

(wählt man eine andere Operatorordnung, ändern sich die Koeffizienten entsprechend des Kommutators). Nochmal, zusammen mit (**4**.70)

$$\hat{H}_S=\hat{H}(\hat{\sigma}_S,\hat{\pi}_S)=\hat{H}(\hat{\sigma}(\tau),\hat{\pi}(\tau))=\hat{H} \tag{4.74}$$

Falls es gelingt, in (**4**.69) den Hamiltonoperator $\hat{H}$ durch Ausnützung von Eigenwertgleichungen aus dem Skalarprodukt auf der rechten Seite zu entfernen, so bekäme man eine integrierbare Differentialgleichung für U. Wenn wir $\hat{\pi}(\tau)$ durch $\hat{\sigma}(\tau)$ und $\hat{\sigma}(0)$ ausdrücken könnten, was tatsächlich oft der Fall ist, so ist dies möglich. Denn $\hat{H}(\hat{\sigma}(\tau),\hat{\pi}(\tau))$ wird so zu einer analytischen Funktion von $\hat{\sigma}(\tau)$ und $\hat{\sigma}(0)$. Die Zustände $|\sigma,\tau>$ und $|\sigma',0>$ sind aber gerade Eigenzustände dieser Operatoren:

$$\boxed{\begin{aligned}
\hat{\sigma}^a(0)|\sigma',0> &= \sigma'^a|\sigma',0> && (4.75)\\
\hat{\sigma}^a(\tau)|\sigma,\tau>=\sigma^a|\sigma,\tau> &\Rightarrow <\sigma,\tau|\hat{\sigma}^a(\tau)|\psi>=\sigma^a<\sigma,\tau|\psi>\forall\psi\,(\text{da }\hat{\sigma}^a\text{ hermitesch}) && (4.76)\\
\Rightarrow\ <\sigma,\tau|\hat{\sigma}^a(\tau)|\sigma',0> &= \sigma^a<\sigma,\tau|\sigma',0> && (4.77)\\
<\sigma,\tau|\hat{\sigma}^a(0)|\sigma',0> &= \sigma'^a<\sigma,\tau|\sigma',0> && (4.78)
\end{aligned}}$$

Diese Eigenwertgleichungen können verwendet werden, wenn wir im Hamiltonoperator die Operatoren so anordnen, daß alle $\hat{\sigma}(\tau)$ links und alle $\hat{\sigma}(0)$ rechts stehen. Nennen wir die dadurch entstehende Funktion der Operatoren (deren Wert mit $\hat{H}$ übereinstimmt) $\hat{f}(\hat{\sigma}(\tau),\hat{\sigma}(0);\tau)$. Die explizite τ-Abhängigkeit kommt, wie wir später sehen werden, aus der Beziehung zwischen $\hat{\pi}(\tau)$ und $\hat{\sigma}(\tau)$, $\hat{\sigma}(0)$. Damit wird (**4**.69)

$$i\partial_\tau U(\sigma,\sigma';\tau)=<\sigma,\tau|\hat{H}(\hat{\sigma},\hat{\pi})|\sigma',0> \tag{4.79}$$

[3]Beachte, die Definition in (**4**.67) impliziert, daß die Ortsoperatoren, die im Schrödingerbild ($\hat{\sigma}_S=\hat{\sigma}(0)$) in der Ortsdarstellung einfach einen multiplikativen Operator verkörperten, im Heisenbergbild im allgemeinen zu Differentialoperatoren “mutieren” können! Auch im Tangentialraum bleiben sie nicht einfach die Identität. ♣

zu

$$
\begin{aligned}
i\partial_\tau U(\sigma,\sigma';\tau) &= <\sigma,\tau|\hat{f}\left(\hat\sigma(\tau),\hat\sigma(0);\tau\right)|\sigma',0>= f(\sigma,\sigma',\tau)<\sigma,\tau|\sigma',0> && (\mathbf{4}.80)\\
\text{bzw. } i\partial_\tau U(\sigma,\sigma';\tau) &= f(\sigma,\sigma',\tau)U(\sigma,\sigma';\tau) && (\mathbf{4}.81)
\end{aligned}
$$

wobei $f(-,-,-)$ dadurch definiert ist, daß es die gleichen Koeffizienten in einer Potenzreihenentwicklung hat wie $\hat{f}(-,-,-)$. Wir werden später sehen, daß sich die Sache noch etwas verkompliziert, aber das ist die prinzipielle Idee. (**4**.81) kann dann problemlos integriert werden zu

$$
U(\sigma,\sigma',\tau) = e^{-i\int_0^\tau \mathrm{d}\tau' f(\sigma,\sigma',\tau')}\mathcal{U}(\sigma,\sigma') \qquad (\mathbf{4}.82)
$$

Schließlich wird $\mathcal{U}(\sigma,\sigma')$ noch bestimmt durch die drei Gleichungen[4]

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^a}+A_a(\sigma)\right)<\sigma,\tau|\sigma',0> &= <\sigma,\tau|\hat\pi_a(\tau)|\sigma',0> && (\mathbf{4}.83)\\
-\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma'^a}+A_a(\sigma')\right)<\sigma,\tau|\sigma',0> &= <\sigma,\tau|\hat\pi_a(0)|\sigma',0> && (\mathbf{4}.84)\\
\lim_{t\to 0} K(\sigma,\sigma';t) &= \delta(\sigma-\sigma') && (\mathbf{4}.85)
\end{aligned}
$$

Beachte: Üblicherweise wird $\lim_{t\to 0} U(\sigma,\sigma';\tau)=\delta(\sigma-\sigma')$ gefordert. Hier haben wir uns jedoch nach der Randbedingung des Heat-Kernels (**4**.16) zu richten.

Im Folgenden führen wir nun die Berechnung von U, also insbesondere die Berechnung von $\hat\pi(\tau)$ in Abhängigkeit von $\hat x(0)$ und $\hat x(\tau)$, konkret durch.

4.1.5 Berechnung des Evolutionsoperators $U(\sigma,\sigma';\tau)$ und des Heat-Kernels $K(\sigma,\sigma';t)$

Zur Vereinfachung gehen wir vorerst wieder über zu einem flachen Worldsheet. Wir sind momentan im Begriff, einen geschlossenen Ausdruck für die Funktionaldeterminante zu suchen, die dann Teil der effektiven Wirkung (**4**.179) sein wird. Da letztere gerade die Feldgleichungen reproduzieren soll, die man auch aus der Forderung nach Weyl-Invarinz erhält, ist davon auszugehen, daß sie keine Abhängigkeiten von der Worldsheet-Metrik aufweist. Dennoch kann es sein, daß die Worldsheet-Metrik während der Rechnung eine bedeutende Rolle spielt und erst beim Endergebnis nicht mehr auftacht. Setzt man die Krümmung einfach zu Null, so verliert man von Beginn an sämtliche Dilatonterme in der Rechnung, da diese alle mit dem Vorfaktor R_g auftauchen. Um Weyl-Skalierungs-Effekte mit einzuschließen, reicht es jedoch, infinitesimale Krümmungen "mitzunehmen". Wir beginnen also vorerst mit einer flachen Metrik und werden in Abschnitt 4.1.6 auf Seite 55 dann ohne eigene Rechnung einen entsprechenden Krümmungsterm aus [Sac94, S.39] übernehmen. Der Hamiltonoperator (**4**.40) von Seite 43 vereinfacht sich mit flacher Metrik wesentlich zu

$$
H(\sigma,\pi) = \pi_a\delta^{ab}\pi_b + C(\sigma) \qquad (\mathbf{4}.86)
$$

Wir ersetzen nun die Differential- bzw. multiplikativen Operatoren (π_a bzw. σ^a) durch die entsprechenden abstrakten Hilbertraum-Operatoren.

$$
\hat H(\hat\sigma(\tau),\hat\pi(\tau)) = \hat\pi_a(\tau)\delta^{ab}\hat\pi_b(\tau) + \hat C(\hat\sigma(\tau)) \qquad (\mathbf{4}.87)
$$

Die Definition von $\hat C(\hat\sigma)$ bedarf noch einer Erläuterung. Wir nehmen an, daß C eine analytische Funktion in den σ^a ist, und somit durch eine Potenzreihe darstellbar ist:

$$
C(\sigma)^\mu_\nu = \sum_{k,l} a_{kl}{}^\mu_\nu\,(\sigma^1)^k(\sigma^2)^l \qquad (\mathbf{4}.88)
$$

[4] Das andere Vorzeichen vor der Ableitung in (**4**.84) erklärt sich folgendermaßen: Die Ortsdarstellung von $\hat\pi_a$ ist

$$
\pi_a = \frac{1}{i}\left(\partial_a + A_a\right)
$$

D.h., daß gilt

$$
<\sigma|\hat\pi_a|\psi>= \frac{1}{i}\left(\partial_a + A_a\right)\psi(\sigma)
$$

Dagegen ist

$$
<\psi|\hat\pi_a|\sigma>=\overline{<\sigma|\hat\pi_a^\dagger|\psi>}=\overline{<\sigma|\hat\pi_a|\psi>}=-\frac{1}{i}\left(\partial_a + A_a\right)\psi(\sigma) \quad \clubsuit
$$

Wie hier angedeutet, tragen aber die Entwicklungskoeffizienten a_{kl} selbst Raumzeit-Indizes und sind somit auch Operatoren in unserem Hilbertraum. Wenn man $\sigma^a \cdot \delta^\alpha_\beta$, was unserem abstrakten $\hat{\sigma}$ entspricht (siehe auch (**4**.33)-(**4**.34)), anstelle von σ^a in die Potenzreihenentwicklung einsetzt, ändert das nichts. Wir können also beim Übergang zu abstrakten Hilbertraum-Operatoren σ durch $\hat{\sigma}$ ersetzen, müssen jedoch zusätzlich die Entwicklungskoeffizienten a_{kl} durch abstrakte Operatoren $\hat{a}_{kl}$ ersetzen[5]. Diese seien definiert durch:

$$\hat{a}_{kl} \equiv \int d^2\sigma a_{kl}{}^\mu_\nu |\sigma, \mu >< \sigma, \nu| \tag{4.89}$$

Das ist die Indentität auf dem Funktionenraum und die lineare Abbildung $a_{kl}{}^\mu_\nu \, e_{(\mu)} \otimes e^{(\nu)}$ auf dem Tangentialraum. Beim Übergang zum Heisenberg-Bild bekommen auch diese Operatoren eine Zeitabhängigkeit, was zur Folge hat, daß $\hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))$ *nicht* automatisch zeitunabhängig ist, wenn $\partial_a C = 0$, einer Beziehung, die im abelschen Fall gilt. Genau dieselben Überlegungen gelten später für $F_{ab}(\sigma)^\mu_\nu$, wobei die Worldsheet-Indizes in diesem Zusammenhang keine Rolle spielen, da sie nicht Teil des Hilbertraums sind.

Die Heisenberggleichungen für $\hat{\pi}$ und $\hat{\sigma}$ sind dann

$$\frac{d\hat{\sigma}^a(\tau)}{d\tau} = i[\hat{H}, \hat{\sigma}^a(\tau)] = i\overbrace{[\hat{\pi}_b(\tau), \hat{\sigma}^a(\tau)]}^{-i\delta^a_b\,(4.27)}\delta^{bc}\hat{\pi}_c(\tau) + i\delta^{bc}\hat{\pi}_c(\tau)[\hat{\pi}_b(\tau), \hat{\sigma}^a(\tau)] + i\overbrace{[\hat{C}(\hat{\sigma}(\tau)), \hat{\sigma}^a]}^{=0\,(4.31)} = 2\delta^{ab}\hat{\pi}_b(\tau) \tag{4.90}$$

$$\frac{d\hat{\pi}_a(\tau)}{d\tau} = i[\hat{\pi}_b(\tau)\delta^{bc}\hat{\pi}_c(\tau)\, ,\, \hat{\pi}_a(\tau)] + i[\hat{C}(\hat{\sigma}(\tau)), \hat{\pi}_a(\tau)] = \tag{4.91}$$

$$= i\hat{\pi}_b(\tau)\delta^{bc}\overbrace{[\hat{\pi}_c(\tau), \hat{\pi}_a(\tau)]}^{-\hat{F}_{ca}(\hat{\sigma}(\tau))\,(4.28)} + i\overbrace{[\hat{\pi}_b(\tau), \hat{\pi}_a(\tau)]}^{-\hat{F}_{ba}(\hat{\sigma}(\tau))}\delta^{bc}\hat{\pi}_c(\tau) + i[\hat{C}(\hat{\sigma}(\tau)), \hat{\pi}_a(\tau)] = \tag{4.92}$$

$$= 2i\hat{F}_{ab}(\hat{\sigma}(\tau))\delta^{bc}\hat{\pi}_c(\tau) + i\delta^{bc}[\hat{\pi}_b(\tau), \hat{F}_{ac}(\hat{\sigma}(\tau))] - i[\hat{\pi}_a(\tau), \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))] \tag{4.93}$$

Um die Gleichung (**4**.93) integrieren zu können, fordern wir das Verschwinden von

$$\boxed{\delta^{bc}[\hat{\pi}_b(\tau), \hat{F}_{ac}(\hat{\sigma}(\tau))] - [\hat{\pi}_a(\tau), \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))] \stackrel{!}{=} 0} \tag{4.94}$$

Unter dieser Nebenbedingung sind die Bewegungsgleichungen also

$$\frac{d\hat{\sigma}^a(\tau)}{d\tau} = 2\hat{\pi}^a(\tau) \tag{4.95}$$

$$\frac{d\hat{\pi}_a(\tau)}{d\tau} = 2i\hat{F}_{ab}(\hat{\sigma}(\tau))\delta^{bc}\hat{\pi}_c(\tau) \tag{4.96}$$

Eine formale Integration der zweiten Gleichung zu

$$\hat{\pi}_a(\tau) \stackrel{?}{=} \left(e^{\int_0^\tau d\tau'\, 2i\hat{F}(\hat{\sigma}(\tau'))}\right)_a^{\;c} \hat{\pi}_c(0) \tag{4.97}$$

ist im allgemeinen nicht möglich. Bildet man nämlich zur Probe die Ableitung nach τ, so ist die Anwendung der Kettenregel, die man benötigen würde, um wieder auf (**4**.96) zu kommen, nur erlaubt, wenn $\hat{F}$ und das Integral im Exponenten kommutieren, was im Allgemeinen nicht der Fall ist (siehe dazu auch Fußnote 9 auf Seite 52). Die Integration in dieser Form ist aber möglich, wenn $\hat{F}(\hat{\sigma}(\tau))$ konstant bezüglich τ ist, was wir deshalb zusätzlich fordern. Die Zeitabhängigkeit von $\hat{F}$ ist ebenfalls durch die Heisenberggleichung gegeben:

$$\boxed{\frac{d\hat{F}_{ab}(\hat{\sigma}(\tau))}{d\tau} = i[\hat{H}, \hat{F}_{ab}(\hat{\sigma}(\tau))] \stackrel{!}{=} 0} \tag{4.98}$$

Hier rächt sich jetzt eine Notationsfaulheit. Ein Teil der Zeitabhängigkeit von $\hat{F}$ steckt nämlich (ebenso wie bei $\hat{C}$, siehe (**4**.88) und (**4**.89), auf dieser Seite) nicht in $\hat{\sigma}(\tau)$, sondern in den Entwicklungskoeffizienten, und man sollte eigentlich schreiben

$$\hat{F}_\tau(\hat{\sigma}(\tau)) \equiv \hat{F}(\hat{\sigma}(\tau)) \tag{4.99}$$

[5]Rückblickend müssen wir also in (**4**.71) auf Seite 46 und in (**4**.74) als Argumente von $\hat{H}$ auch noch die Operatoren $\hat{a}_{kl}$ hinzufügen. ♣

Es folgt aus (**4**.98) also *nicht,* daß $\hat{F}$ unabhängig vom $\hat{\sigma}$-Argument ist, sondern

$$\hat{F} \equiv \hat{F}_\tau(\hat{\sigma}(\tau)) = \hat{F}_0(\hat{\sigma}(0)) \tag{4.100}$$

Dennoch hat das unter Verwendung von (**4**.30) zur Folge, daß

$$[\hat{\sigma}(\tau), \hat{F}] = 0 \quad \forall\tau \tag{4.101}$$

Die Bedeutung der beiden Nebenbedingungen (**4**.94) und (**4**.98) für die Hintergrundfelder untersuchen wir in Abschnitt 4.3 auf Seite 57. Für verschwindende Inhomogenität, wie sie z.B. in [Sac94] betrachtet wird, reduziert sich die erste Forderung auf die Forderung nach dem Verschwinden der "kovarianten Divergenz"[6] von F, also $i\delta^{bc}[\hat{\pi}_b, \hat{F}_{ac}] \stackrel{!}{=} 0$. Die zweite Nebenbedingung ist dann automatisch erfüllt. Falls man bei nicht verschwindender Inhomogenität C statt (**4**.94) getrennt das Verschwinden der kovarianten Divergenz von F und die kovariante Konstanz von C, also $i[\hat{\pi}_a, \hat{C}] \stackrel{!}{=} 0$ fordert, dann wird (**4**.98) zu der Forderung $[\hat{C}, \hat{F}_{ab}] = 0$.

Mit der Nebenbedingung (**4**.98) können wir (**4**.96) jetzt problemlos integrieren[7] zu

$$\hat{\pi}_a(\tau) = \left(e^{2i\hat{F}\cdot\tau}\right)_a^{\ c} \hat{\pi}_c(0) \tag{4.102}$$

Einsetzen in die erste Differentialgleichung (**4**.95) ergibt

$$\frac{d\hat{\sigma}^a(\tau)}{d\tau} \quad = \quad 2\left(e^{2i\hat{F}\cdot\tau}\right)^{ac} \hat{\pi}_c(0) \tag{4.103}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma}^a(\tau) - \hat{\sigma}^a(0) \quad = - \quad i\left(\hat{F}^{-1}{}^a_{\ b}\left(\left(e^{2i\hat{F}\cdot\tau}\right)^{bc} - \delta^{bc}\right)\right)\hat{\pi}_c(0) \tag{4.104}$$

Also können wir jetzt zunächst $\hat{\pi}(0)$ durch $\hat{\sigma}(0)$ und $\hat{\sigma}(\tau)$ ausdrücken

$$\hat{\pi}_a(0) = i\left(e^{2i\hat{F}\tau} - \mathbf{1}\right)^{-1}{}_{ab} \hat{F}^b_{\ c} \cdot (\hat{\sigma}^c(\tau) - \hat{\sigma}^c(0)) \tag{4.105}$$

und damit unter Verwendung von (**4**.102) auch $\hat{\pi}(\tau)$

$$\hat{\pi}_a(\tau) = i\left(e^{2i\hat{F}\tau}\right)_{ab}\left(e^{2i\hat{F}\tau} - \mathbf{1}\right)^{-1}{}^b_{\ c} \hat{F}^c_{\ d} \cdot \left(\hat{\sigma}^d(\tau) - \hat{\sigma}^d(0)\right) = i\hat{F}_{ab}\left(e^{i\hat{F}\tau}\right)^b_{\ c}\left(2i\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-1}{}^c_{\ d}\left(\hat{\sigma}^d(\tau) - \hat{\sigma}^d(0)\right) \tag{4.106}$$

---

[6]Eigentlich ist die kovariante Ableitung angewendet auf ein Element der Lie-Gruppe

$$D_a\chi \equiv [D_a, \chi] = \nabla_a\chi + [A_a, \chi]$$

damit ist es naheliegend, folgenden Ausdruck als **kovariante Divergenz** zu bezeichen

$$D_a\chi^a = [D_a, \chi^a]$$

im flachen Raum stimmt das natürlich überein mit $i[\pi_a, \chi^a]$. Im gekrümmten Raum kommen Terme mit Krümmungstensoren dazu (siehe [**?**, Sac94]). Für abelsche Eichfelder reduziert sich die kovariante Ableitung eines Lie-Gruppen-Elements zur partiellen Ableitung. Die kovariante Divergenz entspricht dann der normalen Divergenz.

Des weiteren, ist anzumerken, daß in zwei Dimensionen die Forderung von kovarianter Divergenzfreiheit für die Feldstärke äquivalent ist zur Forderung nach kovarainter Konstanz. Es ist nämlich

$$0 \stackrel{!}{=} D_aF^{ab} = D_1F^{1b} + D_2F^{2b} = \begin{cases} D_2F^{21} & \text{für b=1} \\ D_1F^{12} & \text{für b=2} \end{cases}$$

Da $F_{11} = F_{22} = 0$ und $F_{21} = -F_{12}$ ist das äquivalent zur Forderung

$$D_cF^{ab} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall a, b, c \in \{1, 2\} \quad \clubsuit$$

[7]Der Term $e^{2iF\cdot\tau}$ aus (**4**.102) sei wie üblich über die Potenzreihe der Exponentialfunktion definiert. Die dabei auftretenden Potenzen von F seien als Matrix-Matrix-Multiplikation, sowohl bzgl. der Raumzeit-Indizes, als auch bzgl. der Worldsheet-Indizes zu verstehen:

$$F^{2a\,\alpha}_{\ \ b\,\beta} \equiv F^{a\,\alpha}_{c\,\gamma}F^{c\,\gamma}_{b\,\beta}$$

Die in (**4**.104) auftauchende Inverse der Feldstärke-Matrix sei entsprechend definiert durch

$$F^{a\,\alpha}_{c\,\gamma} \cdot F^{-1c\,\gamma}_{\ \ \ b\,\beta} = \delta^a_b\delta^\alpha_\beta \quad \clubsuit$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, daß alle analytischen Funktionen einer Matrix (die Matrixeinträgen $\hat{F}_{ab}$) miteinander kommutieren. Jetzt haben wir also die gesuchte Beziehung zwischen dem Impulsoperator zur Zeit τ und den Ortsoperatoren zu den Zeiten 0 und τ gefunden:

$$\boxed{\hat{\pi}_a(\tau) = \tfrac{1}{2}\hat{F}_{ab}\left(e^{i\hat{F}\tau}\right)^b_{\ c}\left(\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-1\ c}_{\quad d}\left(\hat{\sigma}^d(\tau) - \hat{\sigma}^d(0)\right)} \tag{4.107}$$

Der ursprüngliche Gedanke, diese Beziehung herzuleiten, kam von dem Wunsch von (**4**.79) auf Seite 46 zu (**4**.81) zu gelangen. Dafür haben wir angenommen, daß $\hat{\pi}(\tau)$ eine analytische Funktion (mit c-Zahl-Entwicklungskoeffizienten) von $\hat{\sigma}(\tau)$ und $\hat{\sigma}(0)$ ist. In der Beziehung (**4**.107) ist der Koeffizient $\frac{1}{2}\hat{F}e^{i\hat{F}\tau}\left(\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-1}$ aber keine c-Zahl, sondern selbst ein Operator, weshalb man etwas vorsichtiger vorgehen muß. Setzen wir zunächst dieses Ergebnis wieder in die Gleichung (**4**.87) für unseren Hamiltonoperator ein

$$\hat{H}(\hat{\sigma}(\tau),\hat{\pi}(\tau)) = \hat{\pi}_a(\tau)\delta^{ab}\hat{\pi}_b(\tau) + \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau)) = \tag{4.108}$$

$$= \tfrac{1}{4}\hat{F}_{ab}\left(e^{i\hat{F}\tau}\right)^b_{\ c}\left(\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-1\ c}_{\quad d}\left(\hat{\sigma}^d(\tau) - \hat{\sigma}^d(0)\right)\hat{F}^a_{\ e}\left(e^{i\hat{F}\tau}\right)^e_{\ f}\left(\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-1\ f}_{\quad g}\left(\hat{\sigma}^g(\tau) - \hat{\sigma}^g(0)\right) + \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau)) \tag{4.109}$$

Analytische Funktionen von $\hat{F}$ mit c-Zahl-Entwicklungskoeffizienten (wie z.B. $\sin(\hat{F}\tau)$) kommutieren mit $\hat{F}$ und untereinander. Ebenso kommutieren sie auch nach (**4**.101) mit $(\hat{\sigma}^a(\tau) - \hat{\sigma}^a(0))$. Desweiteren impliziert die Antisymmetrie von $\hat{F}$ in den Worldsheet-Indizes, daß

$$\left(\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-1\ c}_{\quad d} = \left(\sin\left(-\hat{F}\tau\right)\right)^{-1\ c}_{\quad d} = -\left(\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-1\ c}_{\quad d} \tag{4.110}$$

$$\left(e^{i\hat{F}\tau}\right)^b_{\ c} = \left(e^{-i\hat{F}\tau}\right)^b_{\ c} = \left(e^{-i\hat{F}\tau}\right)^{-1\ b}_{\quad c} \tag{4.111}$$

Damit können wir (**4**.109) durch Umordnen weiter vereinfachen zu

$$\hat{H}(\hat{\sigma}(\tau),\hat{\pi}(\tau)) = \frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}(\tau) - \hat{\sigma}(0)\right)^a\left(\hat{F}^2\right)^c_a\left(\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-2}_{\quad cb}\left(\hat{\sigma}(\tau) - \hat{\sigma}(0)\right)^b + \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau)) \tag{4.112}$$

Weisen wir aus Übersichtlichkeitsgründen der symmetrischen Matrix in der quadratischen Form noch einen Namen zu

$$\hat{M} \equiv \frac{1}{4}\hat{F}^2\left(\sin(\hat{F}\tau)\right)^{-2} \tag{4.113}$$

Aus der Antihermitizität von $\hat{F}$ (siehe (**4**.63) auf Seite 45) folgt die Hermitizität von $\hat{M}$

$$\hat{M}^\dagger_{ab} = \hat{M}_{ab} \tag{4.114}$$

Zur Erinnerung: Wir wollen eine integrierbare Differentialgleichung für den Evolutionsoperator $U(\sigma,\sigma';\tau)$ der Form (**4**.81) auf Seite 47 erhalten. Dazu haben wir, wie in dem Text auf jener Seite beschrieben, $\hat{\pi}(\tau)$ durch $\hat{\sigma}(\tau)$ und $\hat{\sigma}(0)$ ausgedrückt. Jetzt müssen wir aber noch in (**4**.79) die Operatorordnung im Hamiltonoperator so wählen, daß alle $\hat{\sigma}(\tau)$ links und alle $\hat{\sigma}(0)$ rechts stehen und auf die entsprechenden Zustände wirken können. Multiplizieren wir dazu (**4**.112) aus, und ordnen die Operatoren entsprechend

$$\hat{H} = \hat{\sigma}^a(\tau)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(\tau) - 2\hat{\sigma}^a(\tau)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(0) + \hat{\sigma}^a(0)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(0) - \hat{M}_{ab}[\hat{\sigma}^a(0),\hat{\sigma}^b(\tau)] + \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau)) \tag{4.115}$$

Zur Berechnung des Kommutators lösen wir die Beziehung (**4**.104) zwischen $\hat{\pi}(0)$, $\hat{\sigma}(0)$ und $\hat{\sigma}^a(\tau)$ nach letzterem auf. Damit hat man im Kommutator nur noch Operatoren zur Zeit $\tau = 0$. Zudem benutzen wir wieder die Tatsache aus (**4**.101), daß $\hat{F}$ zu allen Zeiten mit $\hat{\sigma}$ kommutiert.

$$[\hat{\sigma}^a(0),\hat{\sigma}^b(\tau)] = \left[\hat{\sigma}^a(0)\quad,\quad \hat{\sigma}^b(0) - i\hat{F}^{-1\,b}_{\quad c}\left(\left(e^{2i\hat{F}\cdot\tau}\right)^{cd} - \delta^{cd}\right)\hat{\pi}_d(0)\right] = \tag{4.116}$$

$$= -i\hat{F}^{-1\,b}_{\quad c}\left(\left(e^{2i\hat{F}\cdot\tau}\right)^{cd} - \delta^{cd}\right)\overbrace{[\hat{\sigma}^a(0),\hat{\pi}_d(0)]}^{i\delta^a_d\ (4.27)} = \tag{4.117}$$

$$= \hat{F}^{-1\,b}_{\quad c}\left(\left(e^{2i\hat{F}\cdot\tau}\right)^{ca} - \delta^{ca}\right) \tag{4.118}$$

Die Kontraktion von M mit dem Kommutator kann man betrachten als Matrixmultiplikation mit anschließender Spurbildung. Die Spurbildung geht dabei aber nur über die Worldsheet-Indizes! Diese Spur wollen wir mit $\tilde{\mathrm{tr}}$ bezeichnen. Damit und mit (**4**.113) ist

$$\hat{M}_{ab} \cdot [\hat{\sigma}^a(0), \hat{\sigma}^b(\tau)] = \frac{1}{4} \tilde{\mathrm{tr}}\, \hat{F}^2 \left(\sin(\hat{F}\tau)\right)^{-2} \hat{F}^{-1} \left(e^{2i\hat{F}\cdot\tau} - \mathbf{1}\right) = \quad (\mathbf{4}.119)$$

$$= \frac{1}{4} \tilde{\mathrm{tr}}\, \hat{F} \left(\sin(\hat{F}\tau)\right)^{-2} \underbrace{e^{i\hat{F}\cdot\tau}}_{\cos + i \sin} \underbrace{\left(e^{i\hat{F}\cdot\tau} - e^{-i\hat{F}\cdot\tau}\right)}_{2i \sin F\tau} = \quad (\mathbf{4}.120)$$

$$\text{(nur sym. Teil überlebt in Spur)} \quad = \frac{i}{2} \tilde{\mathrm{tr}}\, \hat{F} \left(\sin(\hat{F}\tau)\right)^{-1} \cos \hat{F}\tau = \frac{i}{2} \tilde{\mathrm{tr}}\, \hat{F} \cot \hat{F}\tau \quad (\mathbf{4}.121)$$

Nochmal zusammengefaßt:

$$\boxed{\hat{H} = \hat{\sigma}^a(\tau)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(\tau) - 2\hat{\sigma}^a(\tau)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(0) + \hat{\sigma}^a(0)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(0) - \tfrac{i}{2}\tilde{\mathrm{tr}}\, \hat{F} \cot \hat{F}\tau + \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))} \quad \text{mit } \hat{M} \text{ aus } (\mathbf{4}.113) \quad (\mathbf{4}.122)$$

Setzen wir das jetzt in (**4**.79) auf Seite 46, dann hat man

$$i\partial_\tau U(\sigma, \sigma'; \tau) = i\partial_\tau < \sigma, \tau|\sigma', 0 >=< \sigma, \tau|\hat{H}|\sigma', 0 >= \quad (\mathbf{4}.123)$$

$$=< \sigma, \tau|\hat{\sigma}^a(\tau)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(\tau) - 2\hat{\sigma}^a(\tau)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(0) + \hat{\sigma}^a(0)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(0) - \tfrac{i}{2}\tilde{\mathrm{tr}}\, \hat{F} \cot\left(\hat{F}\tau\right) + \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))|\sigma', 0 > \quad (\mathbf{4}.124)$$

Hier sind wir nun bei dem Problem angelangt, daß wir zwar $\hat{\sigma}(0)$ und $\hat{\sigma}(\tau)$ über die Eigenwertgleichungen (**4**.77) und (**4**.78) auf Seite 46 aus dem Skalarprodukt "herausholen" können, aber die Operatoren $\hat{M}$ (bzw. $\hat{F}$) und $\hat{C}$ müssen wir noch extra betrachten. Wechseln wir vorerst zurück ins Schrödingerbild (siehe Seite 45), dann ist z.B.

$$< \sigma, \tau|\hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))|\sigma', 0 >=< \sigma|_S \hat{C}_S(\hat{\sigma}_S)\hat{U}(\tau)|\sigma' >_S \quad (\mathbf{4}.125)$$

Wir greifen jetzt wieder auf die Definition (**4**.33) auf Seite 42 und auf die auf Seite 47 in den Gleichungen (**4**.88) und (**4**.89) beschriebenen Eigenschaften von $\hat{C}$ bzw. $\hat{F}$ zurück. Danach gilt

$$\hat{C}_S(\hat{\sigma}_S) = \sum_{k,l} \hat{a}^S_{kl} (\hat{\sigma}^1_S)^k (\hat{\sigma}^2_S)^l \quad (\mathbf{4}.126)$$

mit

$$\hat{a}^S_{kl} \equiv \int d^2\sigma a_{kl}{}^\mu{}_\nu |\sigma, \mu >_S < \sigma, \nu|_S \quad (\mathbf{4}.127)$$

Verwenden wir jetzt noch (**4**.33), so wird (**4**.125) zu

$$< \sigma, \tau|\hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))|\sigma', 0 > = < \sigma|_{\text{alt}} \otimes e^{(\alpha_\sigma)} \hat{C}_S(\hat{\sigma})\hat{U}(\tau) e_{(\alpha_{\sigma'})} \otimes |\sigma' >_{\text{alt}} = \quad (\mathbf{4}.128)$$

$$= < \sigma|_{\text{alt}} \hat{C}_S{}^{\alpha_\sigma}{}_\gamma (\hat{\sigma}_{\text{alt}}) \hat{U}(\tau)^\gamma{}_{\alpha_{\sigma'}} |\sigma' >_{\text{alt}} = \quad (\mathbf{4}.129)$$

$$= \left(C^{\alpha_\sigma}_\gamma(\sigma)\right)^* < \sigma|_{\text{alt}} \hat{U}(\tau)^\gamma{}_{\alpha_{\sigma'}} |\sigma' >_{\text{alt}} = \quad (\mathbf{4}.130)$$

$$= C^{\alpha_\sigma}_\gamma(\sigma) U^\gamma_{\alpha_{\sigma'}}(\sigma, \sigma'; \tau) \quad (\mathbf{4}.131)$$

Der Schritt von (**4**.129) nach (**4**.130) ist möglich, da C hermitesch ist (siehe (**4**.62)). Dann gilt eine ähnliche Argumentation wie in Fußnote 4 auf Seite 47. Für antihermitesche Operatoren erhält man das umgekehrte Vorzeichen. Es gilt also mit (**4**.63) und (**4**.114) mit ansonsten gleicher Argumentation wie für C:

$$< \sigma, \tau|\hat{F}_{ab}|\sigma', 0 > = -F_{ab}{}^{\alpha_\sigma}_\gamma(\sigma) U^\gamma_{\alpha_{\sigma'}}(\sigma, \sigma'; \tau) \quad (\mathbf{4}.132)$$

$$\text{bzw. } < \sigma, \tau|\hat{M}_{ab}|\sigma', 0 > = M_{ab}{}^{\alpha_\sigma}_\gamma(\sigma) U^\gamma_{\alpha_{\sigma'}}(\sigma, \sigma'; \tau) \quad (\mathbf{4}.133)$$

[8]Berücksichtigt man noch, daß $\hat{F}\cot\left(\hat{F}\tau\right)$ hermitesch ist, wird (**4**.134) zu

$$
\begin{aligned}
& i\partial_\tau U^{\alpha_\sigma}_{\alpha_{\sigma'}}(\sigma,\sigma';\tau) = \\
&= \quad <\sigma,\tau|\hat{\sigma}^a(\tau)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(\tau) - 2\hat{\sigma}^a(\tau)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(0) + \hat{\sigma}^a(0)\hat{M}_{ab}\hat{\sigma}^b(0) - \frac{i}{2}\tilde{\mathrm{tr}}\,\hat{F}\cot\left(\hat{F}\tau\right) + \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))|\sigma',0> \\
&= \quad \left(\sigma^a M_{ab}{}^{\alpha_\sigma}_{\gamma}(\sigma)\cdot\sigma^b - 2\sigma^a M_{ab}{}^{\alpha_\sigma}_{\gamma}(\sigma)\cdot\sigma'^b + \sigma'^a M_{ab}{}^{\alpha_\sigma}_{\gamma}(\sigma)\cdot\sigma'^b - \frac{i}{2}\left(\tilde{\mathrm{tr}}\,F(\sigma)\cot\left(F(\sigma)\tau\right)\right)^{\alpha_\sigma}_{\ \gamma} + C^{\alpha_\sigma}_{\ \gamma}(\sigma)\right) U^{\gamma}_{\ \alpha_{\sigma'}}(\sigma,\sigma';\tau)
\end{aligned}
$$

Da M_{ab} symmetrisch in a und b ist, können wir die ersten drei Terme wieder in einer quadratischen Form schreiben. Unterdrücken wir aus Gründen der besseren Lesbarkeit wieder die Raumzeit-Indizes, so erhalten wir endlich die integrierbare Differentialgleichung für U:

$$
i\partial_\tau U(\sigma,\sigma';\tau) = \left((\sigma^a - \sigma'^a)M_{ab}(\sigma^b - \sigma'^b) - \frac{i}{2}\left(\tilde{\mathrm{tr}}\,F\cot\left(F\tau\right)\right) + C(\sigma)\right) U(\sigma,\sigma';\tau) \quad \begin{matrix}\text{mit } \hat{M} \\ \text{aus } (\mathbf{4}.113)\end{matrix} \qquad (\mathbf{4}.134)
$$

Das läßt sich nun formal integrieren zu[9]

$$
\boxed{U^{\alpha}_{\beta}(\sigma,\sigma';\tau) = \exp\left\{\tfrac{i}{4}\left(\sigma-\sigma'\right)^a\left(F\cot(F\tau)\right)_{ab}\left(\sigma-\sigma'\right)^b - \tfrac{1}{2}\tilde{\mathrm{tr}}\,\ln\sin\left(F\tau\right) + \tfrac{C(\sigma)\tau}{i}\right\}^{\alpha}_{\ \gamma}\mathcal{U}^{\gamma}_{\beta}(\sigma,\sigma')} \qquad (\mathbf{4}.135)
$$

Zur Erinnerung: $\tilde{\mathrm{tr}}$ kennzeichnet die Spur über die Worldsheet-Indizes.
$\mathcal{U}(\sigma,\sigma')$ muß nun so gewählt werden, daß die Gleichungen (**4**.83-**4**.85) erfüllt sind

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i}\left(\partial_a + A_a(\sigma)\right)\overbrace{<\sigma,\tau|\sigma',0>}^{U(\sigma,\sigma',\tau)} &= <\sigma,\tau|\hat{\pi}_a(\tau)|\sigma'> && (\mathbf{4}.136)\\
-\frac{1}{i}\left(\partial'_a + A_a(\sigma')\right)<\sigma,\tau|\sigma',0> &= <\sigma,\tau|\hat{\pi}_a(0)|\sigma'> && (\mathbf{4}.137)\\
\lim_{t\to 0} K^{\alpha}_{\beta}(\sigma,\sigma';t) &= \delta^{\alpha}_{\beta}\delta(\sigma-\sigma') && (\mathbf{4}.138)
\end{aligned}
$$

wobei wir für $\hat{\pi}(\tau)$ und $\hat{\pi}(0)$ die Gleichungen (**4**.105) und (**4**.107)

$$
\hat{\pi}_a(0) \quad = \quad i\hat{F}_{ab}\left(e^{2i\hat{F}\tau} - \mathbf{1}\right)^{-1\ b}_{\quad c}\left(\hat{\sigma}(\tau) - \hat{\sigma}(0)\right)^c \qquad (\mathbf{4}.139)
$$

---

[8]Wir könnten bei $\hat{F}$, da es zeitlich konstant ist (siehe (**4**.98) und (**4**.100)), aber auch einen anderen Weg gehen, indem wir $\hat{F}$ als $\hat{F}_0(\hat{\sigma}(0)) = \hat{F}_S(\hat{\sigma})$ anstatt $\hat{F}_\tau(\hat{\sigma}(\tau))$ betrachten, und es nach rechts aus dem Skalarprodukt ziehen:

$$
\begin{aligned}
<\sigma,\tau|\hat{F}_{ab}|\sigma',0> &= <\sigma|_S\hat{U}\hat{F}_{S\,ab}(\hat{\sigma})|\sigma'>_S = \\
&= U^{\alpha_\sigma}_{\gamma}(\sigma,\sigma';\tau)F_{ab}{}^{\gamma}_{\ \alpha_{\sigma'}}(\sigma') \quad \clubsuit
\end{aligned}
$$

[9]Betrachte eine matrix- oder operatorwertige Funktion $f(\Omega(\tau))$ mit c-Zahl-Entwicklungskoeffizienten f_n, die als Argument eine von τ abhängige(n) Matrix (bzw. Operator) $\Omega(\tau)$ hat, wie hier z.B. $\cot(\hat{F}\tau)$, so kann bei Differentiation nach τ nur dann formale Differentiation verwendet werden (Funktion mit c-Zahl Argument ableiten und danach wieder Operatoren einsetzen), falls $\Omega(\tau)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Omega(\tau)$ kommutieren. Das ist hier klar gegeben, da $[F\tau, F] = 0$. Ist dies nicht der Fall, so kann man immerhin unter der Spur formal Ableiten. Begründung

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}f(\Omega(\tau)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{tr}\sum f_n\Omega(\tau)^n = \mathrm{tr}\sum f_n\sum_{k=0}^{n-1}\Omega(\tau)^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Omega(\tau)\cdot\Omega(\tau)^{n-k-1} \overset{\text{zyk.Vertauschen}}{=} \\
&= \mathrm{tr}\sum_n f_n\sum_{k=0}^{n-1}\Omega(\tau)^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Omega(\tau) = \mathrm{tr}\sum_n nf_n\Omega(\tau)^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Omega(\tau)
\end{aligned}
$$

Dasselbe gilt natürlich für die Integration.

In unserem Fall haben wir dann für die formale Integration verwendet

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sin^2 x} &= -\cot x \\
\int\cot x &= \ln\sin x \quad \clubsuit
\end{aligned}
$$

$$\hat{\pi}_a(\tau) \quad = \quad \frac{1}{2}\hat{F}_{ab}\left(e^{i\hat{F}\tau}\right)^b_{\ c}\left(\sin\left(\hat{F}\tau\right)\right)^{-1\ c}_{\quad d}\left(\hat{\sigma}(\tau)-\hat{\sigma}(0)\right)^d \qquad (\mathbf{4}.140)$$

verwenden.Wir nehmen ab hier zusätzlich noch an, daß sowohl Feldstärke, als auch Inhomogenität konstant im üblichen Sinne sind

$$\partial_c F_{ab} \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{!}{=} \partial_c C \qquad (\mathbf{4}.141)$$

Leider blieb keine Zeit für eine Untersuchung, ob diese Forderungen tatsaächlich nötig sind.

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^a}+A_a(\sigma)\right)\overbrace{U(\sigma,\sigma',\tau)}^{\equiv\mathcal{U}(\sigma,\sigma')\tilde{U}} \quad = \quad \mathcal{U}\frac{1}{i}\tilde{U}\cdot\left(\frac{i}{2}\left(F\cot(F\tau)\right)_{ab}\left(\sigma-\sigma'\right)^b\right)+\frac{1}{i}\tilde{U}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^a}+A_a(\sigma)\right)R\stackrel{!}{=} \qquad (\mathbf{4}.142)$$

$$\stackrel{!}{=}<\sigma,\tau|\hat{\pi}_a(\tau)|\sigma'> \quad = \quad \frac{1}{2}Fe^{iF\tau}\left(\sin\left(F\tau\right)\right)^{-1}\left(\sigma-\sigma'\right)U(\sigma,\sigma';\tau) \qquad (\mathbf{4}.143)$$

$$\Rightarrow 0 \quad \stackrel{!}{=} \quad \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^a}+A_a(\sigma)+\frac{i}{2}\underbrace{\left(\left(F\cot(F\tau)\right)-Fe^{iF\tau}\left(\sin\left(F\tau\right)\right)^{-1}\right)_{ab}}_{=-iF_{ab}}\left(\sigma-\sigma'\right)^b\right)\mathcal{U}(\sigma,\sigma') \qquad (\mathbf{4}.144)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\sigma^a}\mathcal{U}(\sigma,\sigma') \quad \stackrel{!}{=} \quad -\left(A_a(\sigma)+\frac{1}{2}F_{ab}\left(\sigma-\sigma'\right)^b\right)\mathcal{U}(\sigma,\sigma') \qquad (\mathbf{4}.145)$$

und

$$\frac{1}{i}\left(-\frac{\partial}{\partial\sigma'^a}+A_a(\sigma')\right)\mathcal{U}\tilde{U} \quad = \quad \mathcal{U}\frac{1}{i}\tilde{U}\cdot\frac{i}{2}\left(F\cot(F\tau)\right)_{ab}\left(\sigma-\sigma'\right)^b+\frac{1}{i}\tilde{U}\left(-\frac{\partial}{\partial\sigma'^a}+A_a(\sigma')\right)\mathcal{U}\stackrel{!}{=} \qquad (\mathbf{4}.146)$$

$$\stackrel{!}{=}<\sigma,\tau|\hat{\pi}_a(0)|\sigma'> \quad = \quad iF\left(e^{2iF\tau}-\mathbf{1}\right)^{-1}\left(\sigma-\sigma'\right) \qquad (\mathbf{4}.147)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \quad \stackrel{!}{=} \quad \frac{1}{i}\left(-\frac{\partial}{\partial\sigma'^a}+A_a(\sigma')+\frac{i}{2}\underbrace{\left(\left(F\cot(F\tau)\right)-2iF\left(e^{2iF\tau}-\mathbf{1}\right)^{-1}\right)_{ab}}_{=iF_{ab}}\left(\sigma-\sigma'\right)^b\right)\mathcal{U}(\sigma,\sigma') \qquad (\mathbf{4}.148)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma'^a}\mathcal{U}(\sigma,\sigma') \quad \stackrel{!}{=} \quad \left(A_a(\sigma')-\frac{1}{2}F_{ab}\left(\sigma-\sigma'\right)^b\right)\mathcal{U}(\sigma,\sigma') \qquad (\mathbf{4}.149)$$

Damit hat die Lösung zu den beiden Gleichungen ($\mathbf{4}.145$) und ($\mathbf{4}.149$) die Form

$$\mathcal{U}(\sigma,\sigma')=\widetilde{\mathcal{U}}\tilde{U}T\exp\left\{-\int_{\sigma'}^{\sigma}d\xi\left[A(\xi)+\frac{1}{2}F\cdot(\xi-\sigma')\right]\right\} \qquad (\mathbf{4}.150)$$

wobei T der "Zeitordnungsoperator" bezogen auf die Integrationsvariable ξ ist. Wir können ($\mathbf{4}.135$) also noch etwas expliziter hinschreiben

$$\boxed{U(\sigma,\sigma';\tau)=\widetilde{\mathcal{U}}T\exp\left\{-\int_{\sigma'}^{\sigma}d\xi\left[A(\xi)+\frac{1}{2}F\cdot(\xi-\sigma')\right]\right\}e^{\frac{i}{4}\left(\sigma-\sigma'\right)^aF\cot(F\tau)_{ab}\left(\sigma-\sigma'\right)^b-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\ln(\sin(F\tau))+\frac{1}{i}C\tau} \qquad (\mathbf{4}.151)}$$

Berechnung von $K(\sigma,\sigma',t)$

Wir machen nun die Fortsetzung ins Komplexe rückgängig, um wieder bei unserem $K(\sigma,\sigma',t)$ zu landen.

$$K(\sigma,\sigma';t)=U(\sigma,\sigma';-it)=\widetilde{\mathcal{U}}T\exp\left\{-\int_{\sigma'}^{\sigma}d\xi\left[A(\xi)+\frac{1}{2}F\cdot(\xi-\sigma')\right]\right\}e^{\frac{i}{4}\left(\sigma-\sigma'\right)^TF\underbrace{\cot(-iFt)}_{i\coth(Ft)}\left(\sigma-\sigma'\right)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\ln\underbrace{\sin(-iFt)}_{\frac{1}{i}\sinh(Ft)}-Ct} \qquad (\mathbf{4}.152)$$

also

$$\boxed{K(\sigma,\sigma';t) = \widetilde{\mathcal{U}} T \exp\left\{-\int_{\sigma'}^{\sigma} \mathrm{d}\xi \left[A(\xi) + \frac{1}{2}F\cdot(\xi-\sigma')\right]\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\sigma-\sigma'\right)^T F\coth(Ft)\left(\sigma-\sigma'\right) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \ln\frac{1}{i}\sinh(Ft) - Ct\right\}} \tag{4.153}$$

Die Konstante $\widetilde{\mathcal{U}}$ schließlich wird über die Forderung (**4**.138), daß $K(\sigma,\sigma',t)$ für $t\to 0$ gegen die δ-Funktion geht, bestimmt. Wir bemerken zuvor, daß der von t unabhängige exponentielle Faktor $\exp\left\{-\int_{\sigma'}^{\sigma}\mathrm{d}\xi\left[A(\xi)+\frac{1}{2}F\cdot(\xi-\sigma')\right]\right\}$ für $\sigma=\sigma'$ gleich 1 ist. Es genügt also, den "Rest" von (**4**.153) für $t\to 0$ zu einer δ-Funktion zu machen.[10]

$$\delta(\sigma-\sigma') \stackrel{!}{=} \lim_{t\to 0}\widetilde{\mathcal{U}} e^{-\frac{1}{4}\left(\sigma-\sigma'\right)^T F\coth(Ft)\left(\sigma-\sigma'\right)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \ln\frac{1}{i}\sinh(Ft)-Ct} = \lim_{t\to 0}\widetilde{\mathcal{U}} e^{-\frac{(\sigma-\sigma')^2}{4t}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \ln\left(\frac{1}{i}Ft\right)} \tag{4.154}$$

Wir versuchen also, die übliche Darstellung der δ-Funktion in diese Form zu bringen

$$\begin{aligned} \delta(\Delta\sigma) &= \lim_{t\to 0}(4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\Delta\sigma^2}{4t}} = \lim_{t\to 0}(4\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\Delta\sigma^2}{4t}-\frac{d}{2}\ln t} = && (4.155)\\ &= \lim_{t\to 0}(4\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\Delta\sigma^2}{4t}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \ln\left(\frac{1}{i}Ft\cdot iF^{-1}\right)} = && (4.156)\\ &= \lim_{t\to 0}(4\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \ln\left(iF^{-1}\right)}\cdot e^{-\frac{\Delta\sigma^2}{4t}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \ln\left(\frac{1}{i}tF\right)} && (4.157) \end{aligned}$$

Jetzt folgt aus direktem Vergleich von (**4**.154) und (**4**.157), daß

$$\widetilde{\mathcal{U}} = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \ln\left(iF^{-1}\right)} \tag{4.158}$$

wobei d in unserem Falle die Worldsheet-Dimension ist, also 2. Damit ergibt sich der endgültige Ausdruck für den Heat-Kernel

$$\boxed{\begin{aligned} K^{\alpha}_{\ \beta}(\sigma,\sigma';t) &= (4\pi)^{-1}\, T\exp\left\{-\int_{\sigma'}^{\sigma}\mathrm{d}\xi\cdot\left(A(\xi)+\frac{1}{2}F\cdot(\xi-\sigma')\right)\right\}^{\alpha}_{\ \beta}\times\\ &\times\exp\left\{-\frac{1}{4}(\sigma-\sigma')^T F\coth(Ft)(\sigma-\sigma') - \frac{1}{2}\left[\ln\left(F^{-1}\sinh(Ft)\right)\right]^a_{\ a} - Ct\right\}^{\alpha}_{\ \beta} \end{aligned}} \tag{4.159}$$

T bedeutet dabei die Zeitordnung. Für die Berechnung der ζ-Funktion benötigen wir eigentlich nur

$$\boxed{\mathrm{tr}\, K(\sigma,\sigma;t) = (4\pi)^{-1}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\mathrm{tr}}\ \left[\ln\left(F^{-1}\sinh(Ft)\right)\right]^a_{\ a} - Ct\right\}\right]^{\alpha}_{\ \alpha}} \tag{4.160}$$

Beachte: Die sich aufdrängende und für den abelschen Fall korrekte Form $\frac{e^{-Ct}}{4\pi\sqrt{\det\left(\left(\tilde{F}^{-1}\sinh(Ft)\right)\right)}}$ kann jetzt im allgemeinen nicht mehr erreicht werden, da man die Exponentialfunktion nicht mehr in zwei getrennte Exponentialfunktionen aufspalten kann. (nur wenn $[C,F]=0$) Auch wäre det mit Vorsicht zu genießen, da es sich nur (wie auch $\tilde{\tilde{\mathrm{tr}}}$) auf die Worldsheetindizes bezieht.

---

[10] Sei $f(x)$ eine in 0 stetige Funktion. Dann gilt

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

Insbesondere gilt also für eine Funktion mit $f(0)=1$

$$f(x)\delta(x) = \delta(x) \quad \clubsuit$$

4.1.6 Berücksichtigung einer infinitesimalen Krümmung

Wir wollen nun, wie angekündigt, eine infinitesimale konstante Krümmung zulassen. Nach [Sac94, S.39] ändert sich demnach das Ergebnis für den Evolutionsoperator zu

$$U(\sigma,\sigma';\tau) \to e^{\frac{i}{6}\tau R_g} U(\sigma,\sigma';\tau) + \mathcal{O}(R_g F) + \mathcal{O}(R_g^2) \tag{4.161}$$

Durch analytische Fortsetzung kommen wir mit (4.159) auf die folgende Modifikation des Heat-Kernels

$$\boxed{\operatorname{tr} K(\sigma,\sigma;t) = (4\pi)^{-1}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\operatorname{tr}}\,\left[\ln\left(F^{-1}\sinh(Ft)\right)\right]^a_{\;a} - Ct + \frac{1}{6}tR_g\right\}\right]^\alpha_{\;\alpha} + \mathcal{O}(R^2) + \mathcal{O}(\mathcal{F}\mathcal{R})} \tag{4.162}$$

4.1.7 Berechnung der Determinante Det O

Mit dem oben berechneten Kernel ist

$$\zeta_O(s) = \underbrace{\int d^2\sigma}_{V} \frac{1}{4\pi\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\operatorname{tr}}\,\left[\ln\left(F^{-1}\sinh(Ft)\right)\right]^a_{\;a} - Ct + \frac{1}{6}tR_g\right\}\right]^\alpha_{\;\alpha} \tag{4.163}$$

und damit

$$\ln \operatorname{Det} O = \boxed{\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \frac{V}{4\pi\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\operatorname{tr}}\,\left[\ln\left(F^{-1}\sinh(Ft)\right)\right]^a_{\;a} - Ct + \frac{1}{6}tR_g\right\}\right]^\alpha_{\;\alpha}} \tag{4.164}$$

Für die Determinante folgt aus dem vorangegangenen Abschnitt

$$\boxed{\ln \operatorname{Det} O = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \frac{V}{4\pi\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\ln\left(F^{-1}\sinh(Ft)\right)\right]^a_{\;a} - Ct\right\}\right]^\alpha_{\;\alpha}} \tag{4.165}$$

In geraden Dimensionen kann man nach [BVW91] eine konstante Feldstärke auf eine Blockdiagonalform bringen. Es sollte dann möglich sein, das Integral auf die Form einer Hurwitz-Zeta-Funktion zu bringen. Diese ist ein bißchen spezieller, als unsere verallgemeinerte ζ-Funktion und ist definiert als

$$\zeta_H(s;x) = \sum_{n=0}^\infty (n+x)^{-s} \tag{4.166}$$

Wir begnügen uns hier mit der Betrachtung des Grenzfalls $F \to 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} \ln \operatorname{Det} O &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \frac{V}{4\pi\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\left[\exp\left\{-\ln t\cdot\mathbf{1} - Ct + \frac{1}{6}tR_g\right\}\right]^\alpha_{\;\alpha} = & (4.167)\\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \frac{V}{4\pi\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-2}\left[\exp\left\{-Ct + \frac{1}{6}tR_g\right\}\right]^\alpha_{\;\alpha} & (4.168)\end{aligned}$$

Da C hermitesch ist, ist auch $C^\alpha_\beta + \frac{1}{6}\delta^\alpha_\beta R_g$ hermitesch und somit mit unitären Transformationsmatrizen auf eine reelle Diagonalmatrix D diagonalisierbar

$$C + \frac{1}{6}R = U^\dagger D U \tag{4.169}$$

mit Diagonaleinträgen λ_k. Damit wird (**4**.168) zu

$$\begin{aligned}
\ln \operatorname{Det} O &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \frac{V}{4\pi\Gamma(s)} \left[U^\dagger \int_0^\infty \mathrm{d}t t^{s-2} e^{-Dt} \cdot U \right]_\alpha^\alpha = && (\mathbf{4}.170)\\
&= \left[U^\dagger \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \frac{V}{4\pi\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{d}t t^{s-2} e^{-\lambda_k t} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} U \right]_\alpha^\alpha && (\mathbf{4}.171)
\end{aligned}$$

Für die Diagonaleinträge kann man nun Rechnen wie im abelschen Fall:

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \frac{V}{4\pi\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{d}t t^{s-2} e^{-\lambda_k t} = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \frac{V}{4\pi\Gamma(s)} \lambda_k^{1-s} \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}\tilde{t} \tilde{t}^{s-2} e^{-\tilde{t}}}_{\Gamma(s-1)} = && (\mathbf{4}.172)\\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \frac{V\Gamma(s-1)}{4\pi \cdot (s-1)\Gamma(s-1)} \lambda_k^{1-s} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \frac{V\lambda_k^{1-s}}{4\pi \cdot (s-1)} = && (\mathbf{4}.173)\\
&= \frac{V}{4\pi} \left. \frac{-\ln\lambda_k \cdot \lambda_k^{1-s}(s-1) - \lambda_k^{1-s}}{(s-1)^2} \right|_{s=0} = \frac{V}{4\pi} \lambda_k (\ln\lambda_k - 1) && (\mathbf{4}.174)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für unsere Determinante

$$\begin{aligned}
\ln \operatorname{Det} O &= \left[U^\dagger \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{V}{4\pi}\lambda_k(\ln\lambda_k - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} U \right]_\alpha^\alpha = && (\mathbf{4}.175)\\
&= \frac{V}{4\pi} \left[U^\dagger \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} U U^\dagger \left(\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ln\lambda_k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} - \mathbf{1} \right) U \right]_\alpha^\alpha = && (\mathbf{4}.176)\\
&= && (\mathbf{4}.177)
\end{aligned}$$

also schließlich

$$\boxed{\ln \operatorname{Det} O = \frac{V}{4\pi} \left[\left(C + \tfrac{1}{6}R_g\right) \left(\ln\left(C + \tfrac{1}{6}R_g\right) - \mathbf{1}\right) \right]_\alpha^\alpha} \qquad (\mathbf{4}.178)$$

4.2 Effektive Wirkung aus der Schwinger-Methode

Wir haben nun die Vorraussetzung geschaffen, die bei der Pfadintegration entstehende Funktionaldeterminante zu durch einen mehr oder weniger geschlossenen Ausdruck zu berechnen. Die effektive Wirkung hat nun nach (**4**.179) die Form

$$S_{eff}^{(0)}[G,B,\Phi] = \Delta_{FP} e^{-S_p[\bar{X}]} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} O}} \qquad (\mathbf{4}.179)$$

Es macht wenig Sinn, den langen Ausdruck von (**4**.165) jetzt hier wieder einzusetzen. Stattdessen betrachten wir das Ergebnis von (**4**.178), welches nur "exakt" ist für infinitesimale Krümmung und verschwindende Feldstärke. Damit wird die effektive Wirkung zu

$$S_{eff}^{(0)}[G,B,\Phi] = \Delta_{FP} e^{-S_p[\bar{X}]} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\mathrm{tr} \left(\frac{V}{4\pi} \left[\left(C + \frac{1}{6}R_g\right) \left(\ln\left(C + \frac{1}{6}R_g\right) - \mathbf{1}\right) \right] \right) \right\} \qquad (\mathbf{4}.180)$$

Da wir die Nullmoden nicht berücksichtigt haben, geht uns jetzt eine Integration über die Raumzeit ab. Während das entstehen dieser Raumzeitintegration für den Laplaceoperator einfach ist (die Nullmoden sind gerade die konstanten

Funktionen), muß man im Allgemeinen etwas vorsichtiger vorgehen. (siehe [FT85a, S.318]). Wir fügen die Raumzeit-Integration hier einfach hinzu

$$S^{(0)}_{eff}[G,B,\Phi] \propto \int \mathrm{d}X e^{-S_p[X]} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{V}{4\pi}\left[\left(C+\frac{1}{6}R_g\right)\left(\ln\left(C+\frac{1}{6}R_g\right)-\mathbf{1}\right)\right]\right)\right\} \tag{4.181}$$

Eine verschwindende Feldstärke legt es nahe, den Fall mit ausschließlich Dilaton zu betrachten.

Dilatonfeld

Die Bedingungen an die Hintergrundfelder, daß die Entwicklung der klassischen Wirkung nach der zweiten Ordnung abbricht ist für Φ einfach, wenn man eine flache Raumzeit und ein verschwindendes Axionfeld hat:

$$\Phi_{,\mu\nu} = konst \tag{4.182}$$

Auch die Bedingungen für die Schwingermethode sind dann automatisch erfüllt. Für diesen Fall ist

$$C^{\alpha}_{\beta} = \frac{\alpha'}{2}\Phi^{;\alpha}_{;\beta}R_g \tag{4.183}$$

Und

$$S_p[\bar{X}] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\,\{\partial_a X^\mu \eta_{\mu\nu}\partial^a X^\nu + \alpha'\Phi(X)R_g\} \tag{4.184}$$

Damit bekommt die effektive Dilaton-Wirkung die Form

$$S^{(0)}_{eff}[\Phi] \propto \int \mathrm{d}X e^{-\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{g}\{\Phi(X)R_g\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{V}{4\pi}\left[R_g\left(\frac{\alpha'}{2}\Phi^{;\alpha}_{;\beta}+\frac{1}{6}\delta^\alpha_\beta\right)\cdot\left(\ln R_g\left(\frac{\alpha'}{2}\Phi^{;\alpha}_{;\beta}+\frac{1}{6}\delta^\alpha_\beta\right)-\mathbf{1}\right)\right]\right)\right\} \tag{4.185}$$

4.3 Untersuchung der Nebenbedingungen aus der Schwinger-Methode

4.3.1 Kovariante Ableitungen von C und F

Die erste Nebenbedingung (4.94) aus dem Schwinger-Formalismus lautete

$$\delta^{bc}[\hat{\pi}_c(\tau),\hat{F}_{ab}(\hat{\sigma}(\tau))] - [\hat{\pi}_a(\tau),\hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))] \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.186}$$

Es fällt auf, daß der Ausdruck auf der linken Seite Ähnlichkeit zu dem in (3.70) auf Seite 37 hat, und man die Bedingung vielleicht als eine Forderung nach kovarianter Konstanz des Krümmungstensors ${R_H}^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta}$ interpretieren könnte. Dies konnte jedoch bisher nicht verifiziert werden. Um einen ersten Eindruck von der Nebenbedingung (4.186) zu gewinnen, betrachten wir nur die Raumzeit-Metrik und setzen Axion und Dilaton zu Null. Berechnen wir dann vorerst die kovariante Divergenz von F bzw. die kovariante Ableitung von C einzeln.

Kovariante Divergenz F

Die kovariante Divergenz von F die Form

$$D_a F^{ab} = \nabla_a F^{ab} + \left[A_a, F^{ab}\right] \tag{4.187}$$

Forderung machen würde, daß die beiden Terme in (4.186) getrennt verschwinden, so würde dies für die Feldstärke gerade übereinstimmen mit den Yang-Mills Gleichungen für das Eichfeld A_a.

Ohne Axionfeld und Dilatonfeld vereinfachen sich Eichfeld und Feldstärke zu

$${A_a}^{\mu}_{\ \nu} = \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\partial_a\bar{X}^\alpha \tag{4.188}$$

$${F^{ab}}^{\mu}_{\ \nu} = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta R^\mu_{\nu\alpha\beta}}_{\stackrel{(3.24)}{=}\partial^a\bar{X}^\alpha\partial^b\bar{X}^\beta R^\mu_{\nu\alpha\beta}} \tag{4.189}$$

Die Worldsheet-kovariante Ableitung ist

$$\begin{aligned}
\nabla_a F^{ab} &= \left(\underbrace{\nabla_a \partial^a \bar{X}^\alpha}_{eqm} \partial^b \bar{X}^\beta + \partial^a \bar{X}^\alpha \nabla_a \partial^b \bar{X}^\beta\right) \cdot R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta \partial_a \bar{X}^\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta,\gamma} = && (4.190)\\
&= \left(-\Gamma^\alpha_{\lambda\rho} \partial_a \bar{X}^\lambda \partial^a \bar{X}^\rho \partial^b \bar{X}^\beta + \partial^a \bar{X}^\alpha \nabla_a \partial^b \bar{X}^\beta\right) \cdot R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta \partial_a \bar{X}^\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta,\gamma} = && (4.191)\\
&= \partial^a \bar{X}^\alpha \nabla_a \partial^b \bar{X}^\beta \cdot R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta \partial_a \bar{X}^\gamma \left(R^\mu_{\nu\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} R^\mu_{\nu\lambda\beta}\right) && (4.192)
\end{aligned}$$

Der Kommutator ist

$$\left[A_a, F^{ab}\right]^\mu_{\ \nu} = \partial_a \bar{X}^\gamma \partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta \left(\Gamma^\mu_{\gamma\lambda} R^\lambda_{\nu\alpha\beta} - R^\mu_{\lambda\alpha\beta} \Gamma^\lambda_{\gamma\nu}\right) \tag{4.193}$$

Damit ist insgesamt

$$\begin{aligned}
D_a F^{ab} &= \partial^a \bar{X}^\alpha \nabla_a \partial^b \bar{X}^\beta \cdot R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta \partial_a \bar{X}^\gamma \left(R^\mu_{\nu\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} R^\mu_{\nu\lambda\beta} + \Gamma^\mu_{\gamma\lambda} R^\lambda_{\nu\alpha\beta} - R^\mu_{\lambda\alpha\beta} \Gamma^\lambda_{\gamma\nu}\right) = && (4.194)\\
&= \partial^a \bar{X}^\alpha \underbrace{\left(\nabla_a \partial^b \bar{X}^\beta + \Gamma^\beta_{\lambda\rho} \partial_a \bar{X}^\lambda \partial^b \bar{X}^\rho\right)}_{D_a \partial^b \bar{X}^\beta} \cdot R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \\
&\quad + \partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta \partial_a \bar{X}^\gamma \underbrace{\left(R^\mu_{\nu\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^\mu_{\gamma\lambda} R^\lambda_{\nu\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\gamma\nu} R^\mu_{\lambda\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\gamma\alpha} R^\mu_{\nu\lambda\beta} - \Gamma^\lambda_{\gamma\beta} R^\mu_{\nu\alpha\lambda}\right)}_{\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta}} && (4.195)
\end{aligned}$$

Diese Beziehung hätten wir schneller bekommen über

$$D_a \left(\partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta R^\mu_{\nu\alpha\beta}\right) = \underbrace{D_a \partial^a \bar{X}^\alpha}_{=0} \cdot \partial^b \bar{X}^\beta R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \partial^a \bar{X}^\alpha \underbrace{D_a \partial^b \bar{X}^\beta}_{\left(\nabla_a \partial^b \bar{X}^\beta + \Gamma^\beta_{\gamma\lambda} \partial_a \bar{X}^\gamma \partial^b \bar{X}^\lambda\right)} \cdot R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta \underbrace{D_a R^\mu_{\nu\alpha\beta}}_{\partial_a \bar{X}^\gamma \nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta}} \tag{4.196}$$

Also

$$D_a F^{ab} = \partial^a \bar{X}^\alpha \underbrace{\left(\nabla_a \partial^b \bar{X}^\beta + \Gamma^\beta_{\gamma\lambda} \partial_a \bar{X}^\gamma \partial^b \bar{X}^\lambda\right)}_{D_a \partial^b \bar{X}^\beta} \cdot R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \partial^a \bar{X}^\alpha \partial^b \bar{X}^\beta \underbrace{\partial_a \bar{X}^\gamma \nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta}}_{D_a R^\mu_{\nu\alpha\beta}} \tag{4.197}$$

Kovariante Ableitung von C

Betrachten wir wieder erst die entscheidenden Größen:

$$A_a{}^\mu_{\ \nu} = \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \partial_a \bar{X}^\alpha \tag{4.198}$$

$$C^\mu_\nu = -\partial_a \bar{X}^\alpha \partial^a \bar{X}^\beta \left(R^\mu_{\alpha\nu\beta}\right) \tag{4.199}$$

Damit ist dann

$$D_a C^\mu_\nu = -D_a \partial_c \bar{X}^\alpha \cdot \partial^c \bar{X}^\beta \left(R^\mu_{\alpha\nu\beta} + R^\mu_{\beta\nu\alpha}\right) - \partial_c \bar{X}^\alpha \partial^c \bar{X}^\beta \cdot D_a R^\mu_{\alpha\nu\beta} \tag{4.200}$$

Einsetzen in die Nebenbedingung

Setzen wir jetzt die beiden Ergebnisse (4.197) und (4.200) unter Verwendung von $[\pi_a, \ldots] = \frac{1}{i} D_a(\ldots)$ in die Nebenbedingung (4.186), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \delta^{bc}[\hat{\pi}_c(\tau), \hat{F}_{ab}(\hat{\sigma}(\tau))] - [\hat{\pi}_a(\tau), \hat{C}(\hat{\sigma}(\tau))] = && (4.201)\\
&= \frac{1}{i} \partial^b \bar{X}^\alpha D_b \partial_a \bar{X}^\beta R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{i} \partial^b \bar{X}^\alpha \partial_a \bar{X}^\beta \partial_b \bar{X}^\gamma \nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} - \\
&\quad + \frac{1}{i} D_a \partial_c \bar{X}^\alpha \cdot \partial^c \bar{X}^\beta \left(R^\mu_{\alpha\nu\beta} + R^\mu_{\beta\nu\alpha}\right) + \frac{1}{i} \partial_c \bar{X}^\alpha \partial^c \bar{X}^\beta \partial_a \bar{X}^\gamma \nabla_\gamma R^\mu_{\alpha\nu\beta} = && (4.202)\\
&= \frac{1}{i} \partial^b \bar{X}^\alpha \partial_a \bar{X}^\beta \partial_b \bar{X}^\gamma \nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} && (4.203)
\end{aligned}$$

was wir schließlich zusammenfassen können zu

$$\boxed{2\partial^b\bar{X}^\alpha\partial_a\bar{X}^\beta\partial_b\bar{X}^\gamma\nabla_\gamma R^\mu_{(\nu\alpha)\beta}+\partial^b\bar{X}^\alpha D_b\partial_a\bar{X}^\beta R^\mu_{\nu\alpha\beta}+D_a\partial_c\bar{X}^\alpha\cdot\partial^c\bar{X}^\beta\left(R^\mu_{\alpha\nu\beta}+R^\mu_{\beta\nu\alpha}\right)\stackrel{!}{=}0} \tag{4.204}$$

4.3.2 Zeitliche Konstanz des Feldstärke-Operators

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}_{ab}(\hat{\sigma}(\tau))}{\mathrm{d}\tau}=i[\hat{H},\hat{F}_{ab}(\hat{\sigma}(\tau))]\stackrel{!}{=}0 \tag{4.205}$$

Eine Untersuchung dieser zweiten Nebenbedingung war aus Zeitgründen leider nicht mehr möglich. Es bleibt jedoch anzumerken, daß diese Bedingung automatisch erfüllt ist, wenn ohne Inhomogenität C gerechnet wird. H besteht dann nur aus Impulsoperatoren, die bei kovarianter Konstanz mit F kommutieren. Außerdem werden in dem Fall ohne Inhomogenität die erste Nebenbedingung zu einer Forderung nach dem Verschwinden der kovarianten Divergenz von F. In zwei Dimensionen ist für eine antisymmetrische Größe wie F die kovariante Divergenzfreiheit aber äquivalent zur kovarianten Konstanz. Insofern trittt im homogenen Fall nur eine Nebenbedingung auf.

4.3.3 Hochsymmetrische Räume

Es ist anzunehmen, daß die für die Schwinger-Methode nötigen Bedingungen vielleicht in hochsymmetrischen Räumen erfüllt werden oder dort zumindest eine einfache Form annehmen. Gehe dazu von einem 26-dimensionalen Raum der Form $AdS_3\times S_3\times T^{20}$. Der Dreidimensionale Raum S_3 ist maximal symmetrisch, so daß der Krümmungstensor dort die Form

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta}=K\left(\delta^\mu_\alpha G_{\nu\beta}-\delta^\mu_\beta G_{\nu\alpha}\right) \tag{4.206}$$

(mit K konstant) annimmt.
Auch für die Feldstärke des Axions nehmen wir kovariante Konstanz an

$$H_{\mu\nu\lambda;\alpha} = 0 \tag{4.207}$$

$$H_{\mu\nu\lambda} = H\cdot\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \tag{4.208}$$

(mit H konstant) Der antisymmetrische ε-Tensor sei hier definiert durch

$$\varepsilon_{123} = \frac{1}{\sqrt{G}} \tag{4.209}$$

$$\varepsilon_{\mu ik} = 0 \quad \forall\mu\notin\{1,2,3\} \tag{4.210}$$

Damit wird ([Scha, S.119]; [Kug, S.456])

$$H_{\alpha\beta}{}^\lambda H^\mu_{\lambda\nu} = H^2\varepsilon^\lambda_{\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\nu}{}^\mu=H^2\left(G_{\alpha\nu}\delta^\mu_\beta-G_{\beta\nu}\delta^\mu_\alpha\right) \tag{4.211}$$

$$H^\mu_{\alpha\lambda}H^\lambda_{\beta\nu} = H^2\varepsilon^\mu_{\alpha\lambda}\varepsilon_{\beta\nu}{}^\lambda=H^2\left(\delta^\mu_\beta G_{\alpha\nu}-\delta^\mu_\nu G_{\alpha\beta}\right) \tag{4.212}$$

(H natürl konstant) ε ist hierbei (siehe [Kug, S.310]) der 3-dimensionale total antisymmetrische Tensor. Das alles setzen wir nun in die Feldstärke (**3**.50) auf Seite 35 ein, wobei wir darauf achten müssen, daß wir alle H durch iH ersetzen.

$$\begin{aligned}F_{ab}{}^\mu_\nu &= \varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta\left(\frac{1}{2}R^\mu_{\nu\alpha\beta}-\frac{1}{4}H_{\alpha\beta}{}^\lambda H^\mu_{\lambda\nu}+\frac{1}{4}H^\mu_{\alpha\lambda}H^\lambda_{\beta\nu}\right)-\\&\quad-\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\partial^c\bar{X}^\alpha\partial_c\bar{X}^\beta H^\mu_{\alpha\nu;\beta}-\frac{1}{4}\alpha' R_g\Phi^{;\gamma}H^\mu_{\gamma\nu}= \qquad (4.213)\\&= \varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta\left(\frac{1}{2}K\left(\delta^\mu_\alpha G_{\nu\beta}-\delta^\mu_\beta G_{\nu\alpha}\right)+\frac{1}{4}H^2\left(G_{\beta\nu}\delta^\mu_\alpha-G_{\alpha\nu}\delta^\mu_\beta+\delta^\mu_\beta G_{\alpha\nu}-\delta^\mu_\nu G_{\alpha\beta}\right)\right)-\frac{1}{4}\alpha' R_g\Phi^{;\gamma}H^\mu_{\gamma\nu}= \qquad (4.214)\\&= \varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^\alpha\partial_d\bar{X}^\beta\left(K+\frac{1}{4}H^2\right)\delta^\mu_\alpha G_{\nu\beta}-\frac{1}{4}\alpha' R_g\Phi^{;\gamma}H^\mu_{\gamma\nu} \qquad (4.215)\end{aligned}$$

nochmal

$$\boxed{F_{ab}{}^{\mu}_{\nu} = \varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}\partial_c\bar{X}^{\alpha}\partial_d\bar{X}^{\beta}\left(K + \frac{1}{4}H^2\right)\delta^{\mu}_{\alpha}G_{\nu\beta} - \frac{1}{4}\alpha' R_g \Phi^{,\gamma} H^{\mu}_{\gamma\nu}} \tag{4.216}$$

Betrachte nun die Inhomogenität des Fluktuationsoperators nach (**2**.44) auf Seite 19, wieder mit fortgesetztem H

$$\begin{aligned}
C^{\mu}_{\nu} &= -\partial_a\bar{X}^{\alpha}\partial^a\bar{X}^{\beta}\left(R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} + \frac{1}{4}H^{\mu}_{\alpha\gamma}H^{\gamma}_{\beta\nu}\right) + \frac{\varepsilon^{ab}}{4}\partial_a\bar{X}^{\alpha}\partial_b\bar{X}^{\beta}\left(H^{\mu}_{\alpha\beta;\nu} + H_{\rho\alpha\beta}{}^{;\lambda}\right) + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\lambda}{}_{;\rho}R_g = && (4.217)\\
&= -\partial_a\bar{X}^{\alpha}\partial^a\bar{X}^{\beta}\left(K\left(\delta^{\mu}_{\nu}G_{\alpha\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}G_{\alpha\nu}\right) + \frac{1}{4}H^2\left(\delta^{\mu}_{\beta}G_{\alpha\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}G_{\alpha\beta}\right)\right) + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\lambda}{}_{;\rho}R_g = && (4.218)\\
&= -\partial_a\bar{X}^{\alpha}\partial^a\bar{X}^{\beta}\left(\delta^{\mu}_{\nu}G_{\alpha\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}G_{\alpha\nu}\right)\left(K - \frac{1}{4}H^2\right) + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\lambda}{}_{;\rho}R_g && (4.219)
\end{aligned}$$

Also

$$\boxed{C^{\mu}_{\nu} = \partial_a\bar{X}^{\alpha}\partial^a\bar{X}^{\beta}\left(\delta^{\mu}_{\beta}G_{\alpha\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}G_{\alpha\beta}\right)\left(K - \frac{1}{4}H^2\right)} \tag{4.220}$$

4.4 Bedingungen an Hintergrundfelder für exaktes Gauß-Integral

Wir suchen nach Bedingungen an die Hintergrundfelder, so daß

$$S_p[\bar{X} + x] = S_p[\bar{X}] + \int d^2\sigma \frac{\delta S_p[\bar{X}]}{\delta\bar{X}^{\mu}(\sigma)}x^{\mu}(\sigma) + \int\int d^2\sigma d^2\tilde{\sigma}\frac{\delta^2 S_p[\bar{X}]}{\delta\bar{X}^{\mu}(\sigma)\delta\bar{X}^{\nu}(\tilde{\sigma})}x^{\mu}(\sigma)x^{\nu}(\tilde{\sigma}) \tag{4.221}$$

d.h., daß die Entwicklung von S_p nach der zweiten Ordnung abbricht. Hat man eine flache Raumzeit und ein verschwindendes Axionfeld, so ist die Bedingung für Φ trivial

$$\Phi_{,\mu\nu} = konst \tag{4.222}$$

Auch die Bedingungen für die Schwingermethode sind automatisch erfüllt und man erhält tatsächlich eine effektive Wirkung, deren Variation aber schwächere Bewegungsgleichungen erzeugt, als obige Bedingung!

Wir konzentrieren uns nun also auf die anderen Felder und wollen sehen, ob es überhaupt nichttriviale Felder (d.h. nicht-konstante Felder) gibt die die obige Abbruchbedingung der Entwicklung erfüllen. Wir betrachten dazu den stark vereinfachenden Fall einer eindimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit und einer eindimensionalen Worldsheet-Mannigfaltigkeit. Einen antisymmetrischen Tensor gibt es in einer Dimension nicht. Deshalb fehlt der Axionterm bei dieser Betrachtung. Einen dilatonähnlichen Term lassen wir zunächst weg und fügen ihn später hinzu. Die entsprechende Wirkung ist

$$S[X] = \int d\sigma\,(\partial_\sigma X)^2\,G(X) \tag{4.223}$$

Diese Wirkung wollen wir nun entwickeln um $\bar{X}$ (welches S minimiert). Striche wie bei G' sollen dabei Ableitungen bedeuten, höhere n-te Ableitungen von z.B. G sind gekennzeichnet durch $G^{(n)}$.

$$\begin{aligned}
S[X] &= \int d\sigma\left(\left(\partial_\sigma\bar{X}\right)^2 + 2\partial_\sigma\bar{X}\partial_\sigma x + (\partial_\sigma x)^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G^{(n)}(\bar{X})}{n!}x^n = && (4.224)\\
&= \int d\sigma\Bigg[\left(\partial_\sigma\bar{X}\right)^2 G(\bar{X}) + \underbrace{\left(\left(\partial_\sigma\bar{X}\right)^2 G'(\bar{X})x + 2\partial_\sigma\bar{X}\partial_\sigma x G(\bar{X})\right)}_{=0} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\bar{X}\right)^2 G''(\bar{X})x^2 + 2\partial_\sigma\bar{X}\partial_\sigma x G'(\bar{X})x + (\partial_\sigma x)^2 G(\bar{X})\right) +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\left(\partial_\sigma \bar{X}\right)^2 \frac{G^{(n)}(\bar{X})}{n!}x^n + 2\partial_\sigma \bar{X}\partial_\sigma x\frac{G^{(n-1)}(\bar{X})}{(n-1)!}x^{n-1} + (\partial_\sigma x)^2 \frac{G^{(n-2)}(\bar{X})}{(n-2)!}x^{n-2}\right)\Bigg] \quad (\mathbf{4}.225)$$

Der Term erster Ordnung verschwindet, da $\bar{X}$ die Bewegungsgleichung

$$\left(\partial_\sigma \bar{X}\right)^2 G'(\bar{X}) + \partial_\sigma^2 \bar{X}\cdot G(\bar{X}) = 0 \quad (\mathbf{4}.226)$$

erfüllt.

Betrachte in ($\mathbf{4}$.225) nur den letzten Term. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}&\frac{G^{(n-2)}(\bar{X})}{(n-2)!}x^{n-2}\partial_\sigma x\partial_\sigma x \to \\ &\to \quad -\frac{G^{(n-1)}(\bar{X})}{(n-2)!}\partial_\sigma \bar{X}x^{n-1}\partial_\sigma x - \frac{G^{(n-2)}(\bar{X})}{(n-2)!}(n-2)x^{n-2}\partial_\sigma x\partial_\sigma x - \frac{G^{(n-2)}(\bar{X})}{(n-2)!}x^{n-1}\partial_\sigma^2 x \quad (\mathbf{4}.227)\end{aligned}$$

Zweiten Term auf rechter Seite auf die andere Seite bringen und durch $(n-1)$ teilen führt zu

$$\frac{G^{(n-2)}(\bar{X})}{(n-2)!}x^{n-2}\partial_\sigma x\partial_\sigma x \to -\frac{G^{(n-1)}(\bar{X})}{(n-1)!}\partial_\sigma \bar{X}x^{n-1}\partial_\sigma x - \frac{G^{(n-2)}(\bar{X})}{(n-1)!}x^{n-1}\partial_\sigma^2 x \quad (\mathbf{4}.228)$$

Auch der letzte Term des quadratischen Anteils kann auf diese Weise umgeformt werden

$$G(\bar{X})\partial_\sigma x\cdot\partial_\sigma x \to -G'(\bar{X})\partial_\sigma \bar{X}\cdot x\partial_\sigma x - G(\bar{X})x\partial_\sigma^2 x \quad (\mathbf{4}.229)$$

Damit wird die Entwicklung von S zu

$$\begin{aligned}S[X] \;&=\; S[\bar{X}] + \int d\sigma \left[x\left(\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma \bar{X}\right)^2 G''(\bar{X}) + G'(\bar{X})\partial_\sigma \bar{X}\cdot\partial_\sigma - G(\bar{X})\partial_\sigma^2\right)x + \right. \quad (\mathbf{4}.230)\\ &\left. + \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-1}\left(\frac{1}{n!}\left(\partial_\sigma \bar{X}\right)^2 G^{(n)}(\bar{X}) + \frac{1}{(n-1)!}\partial_\sigma \bar{X}G^{(n-1)}(\bar{X})\partial_\sigma - \frac{1}{(n-1)!}G^{(n-2)}(\bar{X})\partial_\sigma^2\right)x\right] \quad (\mathbf{4}.231)\end{aligned}$$

Wir wollen, daß die Entwicklung von S nach dem quadratischen Term abbricht, also

$$\sum_{n=3}^{\infty}\int d\sigma x^{n-1}\left(\frac{1}{n!}\left(\partial_\sigma \bar{X}\right)^2 G^{(n)}(\bar{X}) + \frac{1}{(n-1)!}\partial_\sigma \bar{X}G^{(n-1)}(\bar{X})\partial_\sigma - \frac{1}{(n-1)!}G^{(n-2)}(\bar{X})\partial_\sigma^2\right)x \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall x(\sigma) \quad (\mathbf{4}.232)$$

Betrachte zuerst den Fall eines konstanten x

$$\partial_\sigma x = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\int d\sigma \left(\partial_\sigma \bar{X}\right)^2 G^{(n)}(\bar{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (\mathbf{4}.233)$$

woraus wiederum folgt

$$\boxed{\int d\sigma \left(\partial_\sigma \bar{X}\right)^2 G^{(n)}(\bar{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall n \geq 3} \quad (\mathbf{4}.234)$$

mit gleicher Argumentation folgt dann für in σ lineare bzw. quadratische x, daß

$$\boxed{\begin{aligned}\int d\sigma\partial_\sigma \bar{X}\cdot G^{(n-1)}(\bar{X}) \;&\stackrel{!}{=}\; 0 \quad \forall n \geq 3 \quad (\mathbf{4}.235)\\ \int d\sigma G^{(n-2)}(\bar{X}) \;&\stackrel{!}{=}\; 0 \quad \forall n \geq 3 \quad (\mathbf{4}.236)\end{aligned}}$$

Fügen wir jetzt noch einen Dilaton-ähnlichen Term zur "Wirkung" dazu

$$S[X] = \int d\sigma \left[(\partial_\sigma X)^2 G(X) + \alpha' R(\sigma)\Phi(X) \right] \tag{4.237}$$

wobei hier R nicht als Krümmungsskalar verstanden werden kann, da dieser auf einer eindimensionale Mannigfaltigkeit verschwindet. Die Entwicklung von S modifiziert sich zu

$$\begin{aligned} S[X] = S[\bar{X}] + \int d\sigma \Bigg[x \left(\frac{1}{2} (\partial_\sigma \bar{X})^2 G''(\bar{X}) + G'(\bar{X}) \partial_\sigma \bar{X} \cdot \partial_\sigma - G(\bar{X}) \partial_\sigma^2 + \frac{1}{2} \alpha' R(\sigma) \Phi''(\bar{X}) \right) x + \\ + \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-1} \left(\frac{1}{n!} (\partial_\sigma \bar{X})^2 G^{(n)}(\bar{X}) + \frac{1}{(n-1)!} \partial_\sigma \bar{X} G^{(n-1)}(\bar{X}) \partial_\sigma - \frac{1}{(n-1)!} G^{(n-2)}(\bar{X}) \partial_\sigma^2 + \frac{1}{n!} \alpha' R(\sigma) \Phi^{(n)}(\bar{X}) \right) x \Bigg] \end{aligned} \tag{4.238}$$

und damit die Forderungen an die Hintergrundfelder zu

$$\int d\sigma \left((\partial_\sigma \bar{X})^2 G^{(n)}(\bar{X}) + \alpha' R(\sigma) \Phi^{(n)}(\bar{X}) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall n \geq 3 \tag{4.239}$$

$$\int d\sigma \partial_\sigma \bar{X} \cdot G^{(n-1)}(\bar{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall n \geq 3 \tag{4.240}$$

$$\int d\sigma G^{(n-2)}(\bar{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall n \geq 3 \tag{4.241}$$

Das Hinzufügen des Dilatonterms ändert die Bedingungen nicht wesentlich. Es ist offensichtlich, daß ein konstantes f die Bedingungen erfüllen würde. Die Frage ist jedoch, ob f notwendig konstant sein muß. Es handelt sich hier um nichttriviale Gleichungen, wenn man bedenkt, daß $\bar{X}$ nicht beliebig ist, sondern die "Bewegungsgleichungen"

$$(\partial_\sigma \bar{X})^2 G'(\bar{X}) + \partial_\sigma^2 \bar{X} \cdot G(\bar{X}) + \alpha' R_g(\sigma) \Phi'(\bar{X}) = 0 \tag{4.242}$$

erfüllen muß. Unter diesen Umständen ist es denkbar, daß eine nichtkonstante Lösung für f existiert, so daß die Bedingungen für alle $\bar{X}$ erfüllt werden, die die Bewegungsgleichungen erfüllen. Selbst in diesem stark vereinfachten Fall, ist die Frage nach der Existenz einer Lösung zu dem "Wirkungsentwicklungsabbruchproblem" schwer zu beantworten. Doch selbst, wenn in dem eindimensionalen Fall nur ein konstantes f die Bedingungen erfüllt, können sich trotzdem in mehreren Dimensionen neue Möglichkeiten auftun. Es ist also sicherlich von Interesse, Überlegungen in dieser Richtung fortzusetzen.

4.5 Andere Möglichkeiten

Aus dem Gauß-Integral ableitbare Pfadintegrale

Es ist allgemein bekannt, daß die einzigen vernünftigen Pfadintegrale, die analytisch berechnet werden können, das Gaußsche Pfadintegral und davon ableitbare Integrale sind. Vom Gauß-Integral ableitbare Integrale haben noch einen Einschub einer endlichen Potenzreihe in das Gauß-Integral. Es ist wohlbekannt, daß man jede eingeschobene Potenz durch Funktionalableitung eines erzeugenden Funktionals erhalten kann. Definiert man

$$F[j] \equiv \int Dx \, e^{-\frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} x^\alpha O_{\alpha\beta} x^\beta + \int d^2\sigma \sqrt{g} j_\alpha(\sigma) x^\beta(\sigma)} \stackrel{(\mathrm{C}.15)}{\propto} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\, O}} e^{\frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} j_\alpha(\sigma) O^{-1\alpha\beta} j_\beta(\sigma)} \tag{4.243}$$

So ist z.B.

$$\int Dx \, x^\mu(\sigma) e^{-\frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} x^\alpha O_{\alpha\beta} x^\beta} = \frac{1}{g} \frac{\delta}{\delta j^\mu(\sigma)} \bigg|_{j=0} F[j] \tag{4.244}$$

Dieses Vorgehen ist im Prinzip für fast jedes analytische Funktional $f[x]$ von x möglich. Mit analytisch ist dabei gemeint, daß man den Ausdruck als Integral über eine Potenzreihe von $x(\sigma)$ schreiben kann. Es gilt dann

$$\int Dx \, f[x] e^{-\frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} x^\alpha O_{\alpha\beta} x^\beta} = f \left[\frac{1}{g} \frac{\delta}{\delta j^\mu(\sigma)} \right] \bigg|_{j=0} F[j] \tag{4.245}$$

Das ist das übliche Vorgehen in der Störungstheorie. Ist nämlich f nicht durch eine *endliche* Potenzreihe darstellbar ist, so führt dieser Ansatz zu einer unendlichen Reihe. Und f enthält in der Quantenfeldtheorie immer den Wechselwirkungsterm S_{int}

$$f[x] = e^{-S_{int}[x]} \tag{4.246}$$

so daß seine Potenzreihe für gewöhnlich unendlich ist. Es gibt natürlich auch noch prinzipiell die Möglichkeit, daß die Reihe zwar unendlich ist, man aber aus irgendeinem Grund erkennt, daß sie gegen einen geschlossenen Ausdruck konvergiert.

Wir wollen hier von der anderen Seite beginnen, und uns überlegen, welche Form S_{int} haben muß damit das Pfadintegral zu einem einfachen Integral, also einem Gaußintegral mit einem einfachen Einschub wird. Dazu müssen wir lediglich den Einschub in den Exponenten heben. Betrachten wir z.B. einen quadratischen Einschub der Form

$$f[x] \equiv (1 + x^\mu(\sigma)x_\mu(\sigma')) \tag{4.247}$$

Nach (4.243) und (4.245) ist

$$\int \mathrm{D}x\, f[x] e^{-\frac{1}{2}\int d^2\sigma' \sqrt{g} x^\alpha O_{\alpha\beta} x^\beta} \propto$$

$$\propto \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} O}} + \frac{1}{g} \frac{\delta^2}{\delta j^\mu(\sigma')\delta j_\mu(\sigma)}\bigg|_{j=0} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} O}} e^{\frac{1}{2}\int d^2\tilde\sigma \sqrt{g} j_\alpha(\tilde\sigma) O^{-1\alpha\beta} j_\beta(\tilde\sigma)} = \tag{4.248}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} O}} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta j^\mu(\sigma')}\bigg|_{j=0} \left(O^{-1}\right)^{\mu\beta} j_\beta(\sigma) \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} O}} e^{\frac{1}{2}\int d^2\tilde\sigma \sqrt{g} j_\alpha \left(O^{-1}\right)^{\alpha\beta} j_\beta} = \tag{4.249}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} O}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(O^{-1}\right)^\mu_{\ \mu} \delta(\sigma - \sigma')\right) \tag{4.250}$$

Hebt man f in den Exponenten, so ergibt sich

$$\int \mathrm{D}x\, f[x] e^{-\frac{1}{2}\int d^2\sigma' \sqrt{g} x^\alpha O_{\alpha\beta} x^\beta} = \int \mathrm{D}x\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2\sigma' \sqrt{g} x^\alpha O_{\alpha\beta} x^\beta + \ln(1 + x^\mu(\sigma)x_\mu(\sigma'))} \tag{4.251}$$

Dem neuen Term im Exponenten fehlt noch ein Integral. Gehen wir deswegen noch einmal rückwärts und definieren

$$\tilde S_{int}[x] \equiv -\int d^2\sigma \sqrt{g} \ln(1 + x^\mu(\sigma)x_\mu(\sigma)) \tag{4.252}$$

Schreibt man das Integral als unendliche Summe, so bekommt man für f ein unendliches Produkt. Das neue f hat also die Form

$$\tilde f[x] \propto \prod_\sigma (1 + x^\mu(\sigma)x_\mu(\sigma)) \tag{4.253}$$

Das Ergebnis des Pfadintegrals wäre für dieses $\tilde f$ nach (4.250) dann

$$\int \mathrm{D}x\, \tilde f[x] e^{-\frac{1}{2}\int d^2\sigma' \sqrt{g} x^\alpha O_{\alpha\beta} x^\beta} \propto \prod_\sigma \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} O}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(O^{-1}\right)^\mu_{\ \mu} \delta(\sigma - \sigma')\big|_{\sigma'=\sigma}\right) \tag{4.254}$$

Oder auch

$$\ln \int \mathrm{D}x\, \tilde f[x] e^{-\frac{1}{2}\int d^2\sigma' \sqrt{g} x^\alpha O_{\alpha\beta} x^\beta} \propto \int d^2\sigma \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det} O}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(O^{-1}\right)^\mu_{\ \mu} \delta(\sigma - \sigma')\big|_{\sigma'=\sigma}\right) \tag{4.255}$$

Alternativ könnte man auch von

$$\tilde{\tilde S}_{int}[x] \equiv -\int d^2\sigma \sqrt{g} \ln(1 + \partial_a x^\mu(\sigma)\partial^a x_\mu(\sigma)) \tag{4.256}$$

ausgehen.

Es bleibt noch die Frage zu klären, ob man Bedingungen an die Hintergrundfelder stellen kann, so daß S_{int} gerade eine Form wie in (**4**.256) annimmt. Konkret würde die Bedingung an die Felder wie folgt aussehen

$$4\pi\alpha' S_p[X] = \left(\partial_a \bar{X}^\mu + \partial_a x^\mu\right) \cdot G_{\mu\nu}(\bar{X}+x) \cdot \left(\partial^a \bar{X}^\nu + \partial^a x^\nu\right) + \text{Axion } + \alpha' \Phi(\bar{X}+x) \stackrel{!}{=}$$
$$\stackrel{!}{=} \quad 4\pi\alpha' S_p[\bar{X}] + \int d^2\sigma \sqrt{g}\, (x_\mu O^\mu_\nu x^\nu - \ln(1 + \partial_a x^\mu(\sigma)\partial^a x_\mu(\sigma))) \tag{4.257}$$

Man sieht, daß dies so noch nicht möglich ist, da $\ln(1 + \partial_a x^\mu(\sigma)\partial^a x_\mu(\sigma))$ nicht wie es sich für einen Wechselwirkungsterm gehört, von der Ordnung $\mathcal{O}(x^3)$ ist, sondern auch konstante, lineare und quadratische Terme enthält. Diese stellen aber für die Integration kein Problem dar. Viel bedeutender ist der Unterschied, daß auf der rechten Seite ausschließlich partielle Ableitungen von x auftauchen, während links gemischte Terme aus x und ∂x auftreten. Es ist jedoch durchaus vorstellbar, S_{int} im Rahmen der integrierbaren Möglichkeiten noch so zu modifizieren, daß eine Bedingung dieser Art erfüllbar wäre. Jedoch ist äußerst unwahrscheinlich, daß diese Bedingung eine kovariante Form hätte. Hinzu kommt, und das ist wohl entscheidend, daß es für Ausdrücke wie (**4**.254) oder (**4**.255) wohl noch weit schwieriger ist, geschlossene Ausdrücke zu finden, als das schon für die Determinante allein mit z.B. der Schwinger-Methode der Fall ist.

Alternativer Ansatz

Eine weitere Möglichkeit bestünde darin, nach Pfadintegralen zu suchen, bei denen die höheren Terme aus der Entwicklung der klassischen Wirkung nichts zu dem Wert des Integrals beisteuern, und die deshalb mit dem Gauß-Integral übereinstimmen.

$$Z = \int Dx e^{S[\bar{X}] + \frac{1}{2}\int\int d\sigma d\tilde{\sigma} \frac{\delta^2 S[\bar{X}]}{\delta\bar{X}(\sigma)\delta\bar{X}(\tilde{\sigma})} x(\sigma)x(\tilde{\sigma}) + h[x]} \stackrel{!}{=} \int Dx e^{S[\bar{X}] + \frac{1}{2}\int\int d\sigma d\tilde{\sigma} \frac{\delta^2 S[\bar{X}]}{\delta\bar{X}(\sigma)\delta\bar{X}(\tilde{\sigma})} x(\sigma)x(\tilde{\sigma})} \tag{4.258}$$

wobei $h[x]$ von der Ordnung $O(x^3)$ ist. Daraus muß nicht unbedingt folgen, daß $h[x] = 0$.

Um die prinzipielle Machbarkeit dieses Ansatzes zu erkunden, betrachten wir wieder den vereinfachten eindimensionalen Fall

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{h(x)} e^{-ax^2} \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \tag{4.259}$$

Was für Forderungen ergeben sich daraus an h ?
Beginnen wir zunächst einfacher und fragen, was sich für Forderungen an

$$g(x) \equiv e^{h(x)} \tag{4.260}$$

ergeben, wenn man will, daß gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) e^{-ax^2} \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \tag{4.261}$$

e^{-x^2} ist eine gerade Funktion. Multipliziert man sie mit einer ungeraden Funktion $u(x)$, so ergibt sich eine ungerade Funktion die bei der Integration verschwindet. Somit ist

$$g(x) = 1 + u(x) \tag{4.262}$$

eine Lösung der Problemstellung in (**4**.261). Sie ist jedoch nicht interessant, da $u(x)$ als ungerade Funktion auch negativ wird, und somit g nicht als e^h, zumindest nicht mit reellem h, geschrieben werden kann. Natürlich gibt es im Prinzip noch unzählige andere Lösungen zu der Problemstellung in (**4**.261), und somit sicherlich auch einige zu (**4**.259). Eine systematische Untersuchung scheint jedoch durch das bestimmte Integral schwierig. So hilft beispielsweise eine Potenzreihenentwicklung nicht weiter, da ein Koeffizientenvergleich unter dem Integral nicht möglich ist, oder besser gesagt, nur zu trivialen Lösungen führt. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß die Suche nach derartigen h sich insbesondere bei Pfadintegralen nicht leichter gestalten würde, als die Suche nach dem Wert des Integrals.

Ausblick

Wir sind während dieser Arbeit teilweise weit von dem ursprünglichen Ziel, einen geschlossenen Ausdruck für eine exakte effektive Wirkung zu suchen, abgewichen. Der erfolgreiche Versuch in Kapitel 2, die Feldgleichungen von niedrigster Ordnung in α' mit der ζ-Funktions-Methode zu reproduzieren, hat uns jedoch eingehend mit der Problematik und mit wichtigen Methoden vertraut gemacht. Er hat uns außerdem zu dem wichtigen Fluktuationsoperator $O = -D^2 + C$, und damit auch zu der Raumzeit-kovarianten Worldsheet-Ableitung D_a und der Inhomogenität C geführt. Die Bedeutung dieser Größen und auch besonders der in Kapitel 3.2 untersuchten zu D_a gehörigen Feldstärke F_{ab} wurden dann in Abschnitt 4.1 bei der Anwendung der Schwinger-Methode sichtbar.

Auch wenn die Behandlung der ursprünglichen Frage in den letzten Abschnitten dabei etwas kurz gekommen ist, so ist hiermit dennoch ein guter Ausgangspunkt für weitergehende Überlegungen geschaffen worden. Der nächste Schritt wäre eine systematische Untersuchung, was genau die in der Schwinger-Methode geforderten Nebenbedingungen für die Hintergrundfelder implizieren. Die zusätzliche Forderung, daß die Entwicklung der klassischen Wirkung nach der zweiten Ordnung abbrechen soll, macht ein "Überleben" von nichttrivialen Feldern äußerst unwahrscheinlich. Es ist jedoch auch unabhängig von der Schwinger-Methode von großem Interesse, ob eine solche Abbruchbedingung erfüllt werden kann.

Die in 4.5 aufgezeigten Alternativen zum Gaußintegral haben sich als nicht vielversprechend erwiesen, und sind wahrscheinlich eine nähere Untersuchung nicht wert. Dagegen ist es naheliegend, in zukünftige Überlegungen auch die Hintergrundfelder des geschlossenen Superstrings mit einzubeziehen, da sich dort unter Umständen andere Möglichkeiten eröffnen könnten.

Unabhängig von dem ursprünglichen Ziel wäre es sicherlich auch interessant, die geometrische Bedeutung von C und F_{ab} auszuarbeiten und die überraschend enge Beziehung zwischen dem Inhomogenitätsterm C und der Feldstärke F, die in Abschnitt 3.3 aufgedeckt wurde, näher zu studieren.

Anhang

Anhang A

Euklidisierung

Für einige Hermitizitätsüberlegungen in dieser Arbeit ist es von Bedeutung, sich im Klaren zu sein, welche der betrachteten Größen reell und welche imaginär sind. Ein Prozess, bei dem komplexe Größen entstehen können, ist die Euklidisierung des Pfadintegrals. Da diese in den meisten Textbüchern mit einer Nebenbemerkung abgetan wird, wollen wir sie im folgenden Abschnitt an einem einfachen Beispiel nachvollziehen, um ihre wesentlichen Eigenschaften kennenzulernen. Als Beispiel wurde jedoch nicht das Pfadintegral für die Punktteilchen-Quantenmechanik gewählt, da dort der Begriff "Euklidisierung" nicht angebracht ist. Die entscheidenden Punkte könnte man jedoch auch dort beobachten. Stattdessen untersuchen wir das Pfadintegral eines Skalarfeldes in 4 Dimensionen.

Im Anschluß daran betrachten wir in Abschnitt A.2 auf Seite 74 die Euklidisierung der Worldsheet-Metrik in der Stringtheorie.

A.1 Euklidisierung des Skalarfeld-Pfadintegrals

A.1.1 Überblick

Wir setzen die folgende Pfadintegralformel als bekannt voraus

$$< \phi', t' | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \dots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \tilde{\phi}, \tilde{t} >= \left. \frac{\int \mathrm{D}\phi \phi(\vec{x}_1, t_1) \dots \phi(\vec{x}_n, t_n) e^{iS[\phi;\tilde{t},t']}}{\int \mathrm{D}\phi e^{iS[\phi;\tilde{t},t']}} \right|_{\phi(\vec{x},\tilde{t})=\tilde{\phi}(\vec{x});\ \phi(\vec{x},t')=\phi'(\vec{x})} \tag{A.1}$$

wobei

$$S[\phi; \tilde{t}, t'] \equiv \int_{\tilde{t}}^{t'} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\vec{x} \mathcal{L}\left(\phi(\vec{x}, t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t)\right) \tag{A.2}$$

Für eine im Feld ϕ quadratische Wirkung ist das obenstehende Pfadintegral meines Wissens auch minkowskisch wohldefiniert. (Vergleiche z.B. mit dem eindimensionalen Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} \mathrm{d}x$, welches auch ohne irgendwelche Tricks ein konvergentes (wenn auch oszillierendes) wohldefiniertes Integral darstellt. Was die Verwendung des euklidischen Pfadintegrals nahelegt, ist erst die Berechnung der Vakuumgreensfunktionen. Wenn die n-Punkt-Korrelationsfunktion $< \phi', t' | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \dots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \tilde{\phi}, \tilde{t} >$ analytisch in $\tilde{t}$ und t' ist, lassen sich diese Argumente analytisch ins Komplexe fortsetzen und es ergibt sich für beliebige ϕ' und $\tilde{\phi}$ (Herleitung siehe Abschnitt A.1.2)

$$< \Omega | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \dots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \Omega > \;=\; \lim_{\tau \to \infty} \frac{< \phi', -i\tau | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \dots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \tilde{\phi}, i\tau >}{< \phi', -i\tau | \tilde{\phi}, i\tau >} \tag{A.3}$$

Beachte, daß $< \phi', -i\tau|$ ausschließlich durch die analytische Fortsetzung von $< \phi', t' \,|$ definiert ist, und nicht als dualer Vektor zu $|\phi', -i\tau >$ bzgl. eines Skalarprodukts. Für reelle Zeiten gilt[1]

$$|\tilde{\phi}, \tilde{t} > \;=\; e^{i\hat{H}\tilde{t}} |\tilde{\phi} > \tag{A.4}$$

[1] $|\phi, t >$ ist ein Eigenzustand des Feldoperators im Heisenbergbild $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$. Der Feldoperator ist, da er der Operator einer physikalischen Observable ist, im Heisenbergbild zeitabhängig. Daß $|\phi, t >$ ebenfalls zeitabhängig ist, liegt daran, daß die Eigenzustände der Feldoperatoren keine physikalischen Zustände sind. Siehe dazu auch Fußnote 2 auf Seite 45. Das ist auch der Grund, warum uns die physikalischen Energieeigenzustände, im besonderen das Vakuum, mehr interessieren als die Eigenzustände der Feldoperatoren. ♣

$$< \phi', t'| \quad = \quad < \phi'|e^{-i\hat{H}t'} \tag{A.5}$$

Die analytische Fortsetzung ist also

$$|\tilde{\phi}, i\tau > \quad \equiv \quad e^{i\hat{H}\cdot i\tau}|\tilde{\phi} >= e^{-\hat{H}\tau}|\tilde{\phi} > \tag{A.6}$$

$$< \phi', -i\tau| \quad \equiv \quad < \phi'|e^{-i\hat{H}\cdot(-i\tau)} =< \phi'|e^{-\hat{H}\tau} \tag{A.7}$$

Es ist nun sehr verlockend, die rechte Seite von (**A**.3) wieder als Pfadintegral in gewohnter Manier zu schreiben:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{< \phi', -i\tau|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\dots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|\tilde{\phi}, i\tau >}{< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >} \stackrel{?}{=} \lim_{\tau\to\infty} \left.\frac{\int \mathrm{D}\phi T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\dots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)e^{iS[\phi;i\tau,-i\tau)}}{\int \mathrm{D}\phi e^{iS[\phi;i\tau,-i\tau)}}\right|_{\substack{\phi(\vec{x}, i\tau) = \tilde{\phi}(\vec{x}) \\ \phi(\vec{x}, -i\tau) = \phi'(\vec{x})}} \quad ? \tag{A.8}$$

Beachte jedoch, daß wir nur über die Analytizität bzgl. $\tilde{t}$ und t' des gesamten Pfadintegrals

$$\left.\int \mathrm{D}\phi T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\dots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)e^{iS[\phi;\tilde{t},t')}\right|_{\substack{\phi(\vec{x}, \tilde{t}) = \tilde{\phi}(\vec{x}) \\ \phi(\vec{x}, t') = \phi(\vec{x}')}}$$

Bescheid wissen, und deshalb auch erst nach der Berechnung t' durch $-i\tau$ und $\tilde{t}$ durch $i\tau$ ersetzen dürfen. Setzt man wie in (**A**.8) einfach die imaginären Zeiten als Integrationsgrenzen bei der Berechnung von $S[\phi; \tilde{t}, t') = \int_{\tilde{t}}^{t'} \mathrm{d}tL$, so ist nicht a priori klar, wie das berechnet werden soll, da die Lagrangefunktion L für beliebige ϕ nicht unbedingt analytisch in t und t' sein muß. (Das Funktionalintegral über ϕ geht über eine sehr allgemeine Klasse von Funktionen, die nichteinmal stetig in den Argumenten $\vec{x}$ und t sein müssen). Für imaginäre Integrationsgrenzen kann der Wert von S also vom Integrationsweg im Komplexen abhängen, und da haben wir keinen vorgegeben. Oder anders gesagt: $S[\phi; i\tau, -i\tau)$ ist einfach nicht wohldefiniert. Das euklidische Pfadintegral ergibt sich tatsächlich nicht aus dieser heuristischen Vorgehensweise. Sie kann jedoch, wie wir gleich sehen werden, durchaus als gute Merkregel herhalten.

Der sicherste Weg ist, das Pfadintegral für imaginäre Zeiten komplett neu herzuleiten. Dabei ergibt sich dann das euklidische Pfadintegral (Herleitung folgt in Abschnitt A.1.3)

$$\boxed{< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >\equiv< \phi', \tau|\tilde{\phi}, \tau >_E= \left.\int \mathrm{D}\phi^E e^{-S^E[\phi^E;-\tau,\tau)}\right|_{\substack{\phi^E(\vec{x}, -\tau) = \tilde{\phi}(\vec{x}) \\ \phi^E(\vec{x}, \tau) = \phi'(\vec{x})}}} \tag{A.9}$$

wobei für eine klassische Lagrange-Dichte der Form

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) = -c\cdot\partial_\mu\phi(x)\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(\vec{x}, t) - V(\phi(x)) \quad \mu, \nu \in \{0, \dots, 3\} \tag{A.10}$$

die euklidische Wirkung die folgende Form annimmt (**A**.64)

$$-S^E[\phi^E; -\tau, \tau) = \int_{-\tau}^{\tau} \mathrm{d}x^4 \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \underbrace{\left(-c\left(\partial_\mu\phi^E\delta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^E\right)^2 - V(\phi^E)\right)}_{\equiv -\mathcal{L}^E} \quad \mu, \nu \in \{1, \dots, 4\} \tag{A.11}$$

Die Felder ϕ^E, über die in (**A**.9) integriert wird, sind dabei reellwertig für reelle Argumente x^4. Sie gehören auch zur selben Klasse von Funktionen, wie die ϕ im minkowskischen Pfadintegral. Die Unterscheidung durch den Index macht erst Sinn, wenn man den Bezug zwischen euklidischer und minkowskischer Wirkung herstellen will. Man erhält rein formal aus $i\mathcal{L}$ (vgl. $\exp\{iS\}$) den entsprechenden euklidischen Term $-\mathcal{L}^E$ (vgl. $\exp\{-S^E\}$), indem man überall frei auftretende (nicht als Argument eines Feldes) x^0 durch $-ix^4$ (entsprechend ∂_0 durch $i\partial_4$) und gleichzeitig das minkowskische Feld durch das euklidische ersetzt

$$x^0 \quad \to \quad -ix^4 \tag{A.12}$$

$$\phi(x^0, \vec{x}) \quad \to \quad \phi^E(\vec{x}, x^4) \tag{A.13}$$

Dabei sind x^0 und x^4 jeweils reell und ϕ und ϕ^E sind jeweils reellwertig für reelle Argumente. Beachte, daß $\phi(-ix^4,\vec{x})$, was man durch einsetzen von $-ix^4$ für x^0 bekommen würde (was wir hier nicht tun), im allgemeinen nicht wohldefiniert ist, da es für ein nichtanalytisches ϕ, welches für reelle Argumente definiert ist, keine eindeutige Fortsetzung ins Komplexe gibt.

Kommen wir nun aber zurück zur Tauglichkeit von (**A**.8) als Merkregel. Betrachte den Exponenten $iS[\phi;i\tau,-i\tau)$. Wenn wir annehmen, daß ϕ doch analytisch ist und definieren

$$S^E[\phi^E;-\tau,\tau) \overset{\text{heur}}{\equiv} -iS[\phi;i\tau,-i\tau] \tag{A.14}$$

$$\phi^E(\vec{x},x^4) \overset{\text{heur}}{\equiv} \phi(-ix^4,\vec{x}) \tag{A.15}$$

so gilt

$$S^E[\phi^E;i\tau,-i\tau] = -i\int_{i\tau}^{-i\tau} \mathrm{d}z \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}L(\phi(\vec{x},z),\partial_z\phi(\vec{x},z),\vec{\nabla}\phi(\vec{x},z)) \tag{A.16}$$

Das Integral über z (normalerweise t) ist ein Kurvenintegral im Komplexen auf einer Kurve γ von $i\tau$ nach $-i\tau$. Nur für holomorphe Integranden ist dies wegunabhängig und nur dort macht dann auch die Bezeichnung $S[\phi;i\tau,-i\tau]$ Sinn. Soviel nochmal zu dem Begriff "heuristisch". Nimmt man an, daß der Integrand holomorph ist und wählt als Integrationsweg

$$z \equiv \gamma(x^4) \equiv -ix^4 \quad x^4 \in [-\tau,\tau] \tag{A.17}$$

so ergibt sich

$$-iS[\phi;i\tau,-i\tau] = -\int_{-\tau}^{\tau} \mathrm{d}x^4 \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}L(\underbrace{\phi(\vec{x},-ix^4)}_{\phi^E(\vec{x},x^4)},i\partial_4\underbrace{\phi(\vec{x},-ix^4)}_{\phi^E(\vec{x},x^4)},\vec{\nabla}\underbrace{\phi(\vec{x},-ix^4)}_{\phi^E(\vec{x},x^4)}) \tag{A.18}$$

Man erhält also dieselbe Form der euklidischen Wirkung wie oben durch die Regeln (**A**.12) und (**A**.13). Das ist der Grund, warum man in Textbüchern oft einfach findet: Variablentrafo $x^0 = -ix^4$, auch wenn das nicht ganz richtig ist. Denn selbst wenn dieser Schritt erlaubt wäre (ϕ analytisch), so wäre man jetzt nicht beim euklidischen Pfadintegral angelangt, da man in (**A**.8) nach wie vor über ϕ integriert und nicht über ϕ^E.

Fassen wir nun die **Merkregel** nocheinmal zusammen:

- ☐ Ersetze in der Minkowskischen Wirkung alle $\phi(\vec{x},x^0)$ durch $\phi^E(\vec{x},x^4)$, "freistehende" x^0 durch $-ix^4$ und entsprechend ∂_0 durch $i\partial_4$
- ☐ Behalte jedoch die Integrationsgrenzen bei!
- ☐ Ersetze auch das Pfadintegralmaß $\mathrm{D}\phi$ durch $\mathrm{D}\phi^E$ (wobei über ϕ^E integriert wird, die reell sind für reelle Argumente!)
- ☐ Der Name "euklidisch" schließlich, kommt daher, daß durch die Ersetzung $x^0 \to -ix^4$ eine flache minkowskische Metrik zu einer flachen euklidischen Metrik wird. Aus $\partial_\mu\phi(x)\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) \quad \mu,\nu \in \{0,\ldots,3\}$ etwa wird $\partial_\mu\phi^E(x)\delta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^E(x) \quad \mu,\nu \in \{1,\ldots,4\}$.

Während also Erwartungswerte innerhalb von Ortseigenzuständen auf natürliche Weise durch Minkowskische Pfadintegrale ausdrückbar sind, lassen sich Vakuumserwartungswerte auf natürliche Weise durch euklidische Pfadintegrale darstellen!

Ebenso wie das reine Skalarprodukt $<\phi',-i\tau|\tilde{\phi},i\tau>$in (**A**.9) kann man auch die n-Punkt-Funktion $<\phi',-i\tau|T\hat{\phi}(\vec{x}_1,t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n,t_n)|\tilde{\phi},i\tau>$ durch das euklidische Pfadintegral ausdrücken. Definiere dazu erstmal die euklidische n-Punkt-Funktion

$$<\phi',\tau|T\hat{\phi}^E(\vec{x}_1,\tau_1)\ldots\hat{\phi}^E(\vec{x}_n,\tau_n)|\tilde{\phi},-\tau>_E \equiv <\phi',-i\tau|T\hat{\phi}(\vec{x}_1,-i\tau_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n,-i\tau_n)|\tilde{\phi},i\tau> \tag{A.19}$$

Für sie gilt (die Herleitung der folgenden Formel fehlt in Abschnitt A.1.3. Sie ist jedoch eine naheliegende Übertragung des Minkowskischen Falls auf den Euklidischen; insbesondere die Zeitordnung sollte durch denselben Mechanismus entstehen)

$$<\phi',\tau|T\hat{\phi}^E(\vec{x}_1,\tau_1)\ldots\hat{\phi}^E(\vec{x}_n,\tau_n)|\tilde{\phi},-\tau>_E = \int \mathrm{D}\phi^E\phi^E(\vec{x}_1,\tau_1)\ldots\phi^E(\vec{x}_n,\tau_n)e^{-S^E[\phi^E;-\tau,\tau)}\Bigg|_{\substack{\phi^E(\vec{x},-\tau)=\tilde{\phi}(\vec{x})\\ \phi^E(\vec{x},\tau)=\phi'(\vec{x})}} \tag{A.20}$$

Um n-Punkt-Funktionen mit minkowskischen Feldoperatoren $\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)$ zu bekommen, kann man nach der Berechnung der euklidischen n-Punkt-Funktion wieder analytisch fortsetzen und alle τ_k durch it_k ersetzen.

$$< \phi', -i\tau | T\hat{\phi}^E(\vec{x}_1, \tau_1) \ldots \hat{\phi}^E(\vec{x}_n, \tau_n) | \tilde{\phi}, i\tau >= \int \mathrm{D}\phi^E \phi^E(\vec{x}_1, \tau_1) \ldots \phi^E(\vec{x}_n, \tau_n) e^{-S^E[\phi^E; -\tau, \tau)} \Bigg|_{\substack{\phi^E(\vec{x}, -\tau) = \tilde{\phi}(\vec{x}) \\ \phi^E(\vec{x}, \tau) = \phi'(\vec{x}) \\ \tau_k = it_k}} \quad (\mathbf{A}.21)$$

Das endgültige Ergebnis für die Vakuum-n-Punkt-Funktion aus ($\mathbf{A}$.3) hat dann die Form

$$\boxed{\begin{aligned} < \Omega | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \ldots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \Omega > &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{< \phi', -i\tau | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \ldots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \tilde{\phi}, i\tau >}{< \phi', -i\tau | \tilde{\phi}, i\tau >} = \\ &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{\int \mathrm{D}\phi^E \phi^E(\vec{x}_1, \tau_1) \ldots \phi^E(\vec{x}_n, \tau_n) e^{-S^E[\phi^E; -\tau, \tau)}}{\int \mathrm{D}\phi^E e^{-S^E[\phi^E; -\tau, \tau)}} \Bigg|_{\substack{\phi^E(\vec{x}, -\tau) = \tilde{\phi}(\vec{x}) \\ \phi^E(\vec{x}, \tau) = \phi'(\vec{x}) \\ \tau_k = it_k}} \end{aligned}} \quad (\mathbf{A}.22)$$

Man hätte bei der Herleitung von ($\mathbf{A}$.3) statt $t' \to -i\tau$ und $\tilde{t} \to i\tau$ auch nur leicht ins Imaginäre "gedrehte" Zeitargumente (Wick-Rotation) verwenden können, also $t' = e^{-i\varepsilon}\tau \approx (1 - i\varepsilon)\tau$ und $\tilde{t} = -e^{-i\varepsilon}\tau \approx (-1 + i\varepsilon)\tau$, wobei ε beliebig klein (aber nicht 0!) sein kann. Das führt dazu, daß man das ε oft ganz wegläßt (sich nur dazudenkt) und damit das gewöhnliche minkowskische Pfadintegral für Zeiten von $-\infty$ bis ∞ erhält. Dies ist jedoch eine unsaubere Formulierung, da ohne den ε-Term nicht der Vakuumanteil aus der Entwicklung nach Energieeigenzuständen herausgefiltert wird. Mit dem ε-Term hingegen kann für die entsprechenden Erwartungswerte $< \phi', (1 - i\varepsilon)\tau | \ldots | \tilde{\phi}, (-1 + i\varepsilon)\tau >$ nicht einfach das Minkowskische Pfadintegral verwenden. (Selbes Problem wie bei ($\mathbf{A}$.8)). Inwieweit die Verwendung des Minkowskischen Pfadintegrals dann überhaupt Sinn macht, müßte man wohl durch eine erneute Herleitung des Pfadintegrals mit beliebig gedrehten Zeiten überprüfen.

A.1.2 Der Grund für die analytische Fortsetzung

In diesem Abschnitt wollen wir die oben angegebene Gleichung ($\mathbf{A}$.3) herleiten. Sie lautet

$$< \Omega | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \ldots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \Omega >= \lim_{\tau \to \infty} \frac{< \phi', -i\tau | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \ldots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \tilde{\phi}, i\tau >}{< \phi', -i\tau | \tilde{\phi}, i\tau >} \quad (\mathbf{A}.3{=}\mathbf{A}.23)$$

Wir wollen also den Vakuumerwartungswert $< \Omega | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \ldots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \Omega >$ berechnen. Mit Hilfe des Minkowskischen Pfadintegrals können wir Erwartungswerte bezüglich Feldeigenzuständen berechnen, wie z.B.
$< \phi', t' | T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1) \ldots \hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n) | \tilde{\phi}, t >$ über Gleichung ($\mathbf{A}$.1). Wenn die den Erwartungswert bildenden Zustandsvektoren allerdings keine Feldeigenfunktionen $|\phi >$ sind, wie z.B. unser physikalisches Vakuum $|\Omega >$, wäre es naheliegend, diesen Zustand in Feldeigenzuständen zu entwickeln, wodurch man den gewünschten Erwartungswert als Summe berechenbarer Erwartungswerte erhält. Alternativ kann man aber auch einen mit Feldeigenzuständen gebildeten Erwartungswert betrachten und die Feldeigenzustände nach Energieeigenzuständen entwickeln. Einer davon ist gerade unser Vakuumzustand $|\Omega >$ und wir werden sehen, daß für einen bestimmten Limes von t die Beiträge der anderen Energieeigenzustände wegfallen. Das Vorgehen hier folgt im Wesentlichen [GR, S. 413-415].

Entwickle nun also den Heisenberg-Zustand $|\phi, t >$ in Energieeigenzuständen (bezeichne dabei $|\Omega >$ der Einfachheit halber als $|0 >$, der hier also nicht den Vakuumzustand der freien Theorie kennzeichnen soll) und extrahiere anschließend explizit die Zeitabhängigkeit.

$$|\phi, t > \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} |n >< n | \phi, t >= \sum_{n=0}^{\infty} |n >< n | e^{i\hat{H}t} | \phi_S >= \quad (\mathbf{A}.24)$$

$$=\; \sum_{n=0}^{\infty} e^{iE_n t} |n >< n | \phi_S > \quad (\mathbf{A}.25)$$

Damit wird aus der linken Seite von (**A**.1)

$$< \phi', t'|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|\tilde{\phi}, \tilde{t} >= \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{iE_n\tilde{t}-iE_m t'} < n|\tilde{\phi}_S >< \phi'_S|m >< m|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|n > \qquad (\mathbf{A}.26)$$

Es muß nun überlegt werden, für welche Werte von t' und $\tilde{t}$ evtl. alle Terme auf der rechten Seite außer der interessierenden Vakuums-n-Punkt-Funktion ($m = n = 0$) wegfallen. Da die n-Punkt-Korrelationsfunktion offensichtlich analytisch in t' und $\tilde{t}$ ist, kann man sie ins Komplexe fortsetzen. Setzt man dann für $t' = -i\tau$ und für $\tilde{t} = i\tau, \quad \tau \in \mathbf{R}$, erhält man

$$\begin{aligned} &< \phi', -i\tau|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|\tilde{\phi}, i\tau >= \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\tau(E_n+E_m)} < n|\tilde{\phi}_S >< \phi'_S|m >< m|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|n >= \qquad (\mathbf{A}.27) \\ &= e^{-2\tau E_0} \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\tau(E_n+E_m-2E_0)} < n|\tilde{\phi}_S >< \phi'_S|m >< m|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|n > \qquad (\mathbf{A}.28) \end{aligned}$$

Man beachte dabei allerdings, daß $< \phi', -i\tau|$ ausschließlich durch die stetige Fortsetzung von $< \phi', t\,|$ definiert ist, und nicht als dualer Vektor zu $|\phi', -i\tau >$ bzgl. eines Skalarprodukts.

Wenn das Vakuum ein echtes ist, also E_0 die minimale Energie besitzt, und zudem diese Energie nicht entartet ist, also

$$E_0 < E_n \, \forall n \in \mathbf{N} \qquad (\mathbf{A}.29)$$

dann gehen für $\tau \to \infty$ alle Summanden gegen 0. Das ist zuviel des Guten. Normiert man die Korrelationsfunktion jedoch, dann sieht die Sache gleich besser aus. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} < \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau > &= e^{-2\tau E_0} \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\tau(E_n+E_m-2E_0)} < n|\tilde{\phi}_S >< \phi'_S|m > \delta_{mn} = \qquad (\mathbf{A}.30) \\ &= e^{-2\tau E_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\tau(E_n-E_0)} < \phi'_S|n >< n|\tilde{\phi}_S > \qquad (\mathbf{A}.31) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\frac{< \phi', -i\tau|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|\tilde{\phi}, i\tau >}{< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >} = \\ &= \frac{\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\tau(E_n+E_m-2E_0)} < n|\tilde{\phi}_S >< \phi'_S|m >}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\tau(E_n-E_0)} < \phi'_S|n >< n|\tilde{\phi}_S >} < m|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|n > \qquad (\mathbf{A}.32) \end{aligned}$$

Für $\tau \to \infty$ gehen im Zähler alle Terme außer $m = n = 0$ und im Nenner alle Terme außer $n = 0$ gegen Null. Damit erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{< \phi', -i\tau|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|\tilde{\phi}, i\tau >}{< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >} =< 0|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|0 >=< \Omega|T\hat{\phi}(\vec{x}_1, t_1)\ldots\hat{\phi}(\vec{x}_n, t_n)|\Omega > \qquad (\mathbf{A}.33)$$

A.1.3 Berechnung von $< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >$, natürliches Auftreten des euklidischen Pfadintegrals

Wir folgen bei der Berechnung von $< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >$ der Herleitung des minkowskischen Pfadintegrals aus [GR, S. 391-395]. Sie sollte jedoch auch ohne diese Referenz verständlich sein. Zuerst wollen wir nochmal deutlich machen, daß $< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >$ durch Fortsetzung ins Komplexe definiert ist. D.h., wir gehen davon aus, daß $< \phi', t|\tilde{\phi}, -t >$

$t \in \mathbf{R}$ reell analytisch in t ist, setzen es ins Komplexe fort $< \phi', z|\tilde{\phi}, -z > \quad z \in \mathbf{C}$ und setzen anschließend für $z = -i\tau \quad \tau \in \mathbf{R}$ ein. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\tilde{\phi}, i\tau > &= e^{i\hat{H}\cdot i\tau}|\tilde{\phi} >= e^{-\hat{H}\tau}|\tilde{\phi} >\equiv \hat{K}(\tau)|\tilde{\phi} > && (\mathbf{A}.34)\\
|\phi', -i\tau > &= e^{\hat{H}\tau}|\phi' >= \hat{K}(-\tau)|\phi' > && (\mathbf{A}.35)\\
< \phi', -i\tau| &= < \phi'|e^{-i\hat{H}\cdot(-i\tau)} =< \phi'|e^{-\hat{H}\tau} \neq < \phi'|\hat{K}(-\tau)^\dagger && (\mathbf{A}.36)\\
< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau > &= < \phi'|e^{-2\hat{H}\tau}|\tilde{\phi} > && (\mathbf{A}.37)
\end{aligned}$$

Die Definition von $< \phi', -i\tau|$ ist besonders hervorzuheben, da die dritte Zeile zeigt, daß $< \phi', -i\tau|$ nicht der duale Vektor zu $|\phi', -i\tau >$ ist! Wir sehen außerdem, daß nun der Evolutionsoperator nicht mehr unitär ist. Die zeitunabhängigen Vektoren $< \phi'|$ sind jedoch nach wie vor die dualen Vektoren zu $|\phi' >$. Auch die Operatoren mit imaginären Zeiten sind rein über Fortsetzung ins Komplexe definiert

$$\hat{\phi}^E(x^E) \equiv \hat{\phi}(\vec{x}, -i\tau) = e^{i\hat{H}\cdot(-i\tau)}\hat{\phi}(\vec{x})e^{-i\hat{H}\cdot(-i\tau)} = e^{\hat{H}\tau}\hat{\phi}(\vec{x})e^{-\hat{H}\tau} \qquad (\mathbf{A}.38)$$

so daß nach wie vor die üblichen Eigenwertgleichungen erfüllt sind

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\vec{x}, -i\tau)|\phi', -i\tau > &= e^{\hat{H}\tau}\hat{\phi}(\vec{x})e^{-\hat{H}\tau}e^{\hat{H}\tau}|\phi' >= \phi'(\vec{x})|\phi', -i\tau > && (\mathbf{A}.39)\\
\hat{\phi}(\vec{x}, i\tau)|\tilde{\phi}, i\tau > &= \tilde{\phi}(\vec{x})|\tilde{\phi}, i\tau > && (\mathbf{A}.40)\\
< \phi', -i\tau|\hat{\phi}(\vec{x}, -i\tau) &= < \phi'|e^{-\hat{H}\tau}e^{\hat{H}\tau}\hat{\phi}(\vec{x})e^{-\hat{H}\tau} = \phi'(\vec{x}) < \phi', -i\tau| && (\mathbf{A}.41)
\end{aligned}$$

Unterteilen wir nun 2τ (statt $t' - t$, wie bei der Herleitung des minkowskischen Pfadintegrals) in N Zeitintervalle der Länge ε.

$$2\tau \equiv N\varepsilon \qquad (\mathbf{A}.42)$$

Neben den 2 Zuständen $|\phi', -i\tau >\equiv |\phi_N, -i\tau >$ und $|\tilde{\phi}, i\tau >\equiv |\phi_0, i\tau >$ definieren wir nun noch $N-1$ Zwischenzustände $|\phi_n, -i\tau_n >$ mit

$$\tau_n \equiv -\tau + n\varepsilon \qquad (\mathbf{A}.43)$$

Für jeden Stützpunkt τ_n fügen wir eine Zerlegung des Einheitsoperators ein

$$\mathbf{1} = \int \mathrm{d}\phi_n|\phi_n, t_n >< \phi_n, t_n| \qquad (\mathbf{A}.44)$$

wobei das Integral $\int \mathrm{d}\phi_n$ selbst für ein Funktionalintegral stehen soll. (Jedes ϕ_n ist Funktion des Ortes $\vec{x}$ und damit ein unendlich dimensionaler Vektor. Über jede dieser Komponenten muß integriert werden. Auf diese Problematik wollen wir hier nicht eingehen, da sie bei jeder Beschreibung von minkowskischen Pfadintegralen beim Übergang von der Quantenmechanik zur Feldtheorie diskutiert wird)

$$< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^{N-1} \mathrm{d}\phi_n < \phi', -i\tau|\phi_{N-1}, -i\tau_{N-1} > \ldots < \phi_2, -i\tau_2|\phi_1, -i\tau_1 >< \phi_1, -i\tau_1|\tilde{\phi}, i\tau > \qquad (\mathbf{A}.45)$$

Für jedes der Matrixelemente im Integranden gilt analog zu ($\mathbf{A}$.37)

$$\begin{aligned}
< \phi_{n+1}, -i\tau_{n+1}|\phi_n, -i\tau_n > &= < \phi_{n+1}|e^{-\hat{H}\cdot\overbrace{(\tau_{n+1} - \tau_n)}^{\varepsilon}}|\phi_n >=< \phi_{n+1}|e^{-\hat{H}(\hat{\phi},\hat{\pi})\cdot\varepsilon}|\phi_n >= && (\mathbf{A}.46)\\
&= \int \mathrm{d}\pi_n < \phi_{n+1}|\pi_n >< \pi_n|e^{-\hat{H}(\hat{\phi},\hat{\pi})\cdot\varepsilon}|\phi_n >= {}^2 && (\mathbf{A}.47)\\
&= \int \mathrm{d}\pi_n < \phi_{n+1}|\pi_n >< \pi_n|\phi_n > e^{-H(\phi_n,\pi_n)\cdot\varepsilon} = && (\mathbf{A}.48)\\
&= \int \mathrm{d}\pi_n e^{i\pi_n(\phi_{n+1}-\phi_n)}e^{-H(\phi_n,\pi_n)\cdot\varepsilon} && (\mathbf{A}.49)
\end{aligned}$$

Bezeichnet man nun

$$\phi_n \equiv \phi^E(\tau_n), \quad \phi_N \equiv \phi^E(\tau) = \phi', \quad \phi_0 \equiv \phi^E(-\tau) = \tilde{\phi} \qquad (\mathbf{A}.50)$$

$$\pi_n \equiv \pi^E(\tau_n) \qquad (\mathbf{A}.51)$$

So erhält man nach Ausführung des Grenzübergangs $\varepsilon \to 0$ schließlich

$$< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau >= \int\int \mathrm{D}\phi^E \mathrm{D}\pi^E e^{\int_{-\tau}^{\tau} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\left(i\pi^E(\vec{x},\tau)\partial_\tau\phi^E(\vec{x},\tau) - \mathcal{H}\left(\phi^E(\vec{x},\tau),\pi^E(\vec{x},\tau)\right)\right)} \qquad (\mathbf{A}.52)$$

Warum wir die Felder hier mit dem Index ^{E} für "euklidisch" kennzeichnen, wird erst etwas später klar. Im Moment sind es einfach analytische Funktionen von τ, die für reelle Argumente τ auch reelle Werte annehmen. Außerdem ist zu bemerken, daß hier π^E und ϕ^E völlig unabhängig sind, $\partial_\tau\phi^E$ also nicht durch π^E ausgedrückt werden kann.

Wir wollen nun zum Feynmann-Pfadintegral übergehen, also die Integration über das Impulsfeld π ausführen. Betrachte dazu eine klassische Lagrange-Dichte von der Form

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) = -c \cdot \partial_\mu\phi(x)\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(\vec{x},t) - V(\phi(x)) \qquad (\mathbf{A}.53)$$

Dann ist

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))}{\partial(\partial_0\phi(x))} = -2c\partial^0\phi(\vec{x},t) = 2c\partial_0\phi(\vec{x},t) \qquad (\mathbf{A}.54)$$

$$\partial_0\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{2c}\pi(\vec{x},t) \qquad (\mathbf{A}.55)$$

$$\mathcal{H}(\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x},t)) = \pi(\vec{x},t)\partial_0\phi(\vec{x},t) - \mathcal{L}(\phi(\vec{x},t),\partial_\mu\phi(\vec{x},t)) = \qquad (\mathbf{A}.56)$$

$$= \frac{1}{2c}\pi^2 + c\left(-(\partial_0\phi)^2 + \left(\vec{\nabla}\phi\right)^2\right) + V(\phi) = \qquad (\mathbf{A}.57)$$

$$= \frac{1}{4c}\pi^2 + c\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + V(\phi) \qquad (\mathbf{A}.58)$$

Um in (**A**.52) die Integration über π ausführen zu können, müssen wir den Exponenten quadratisch ergänzen

$$i\pi^E(\vec{x},\tau)\partial_\tau\phi^E(\vec{x},\tau) - \mathcal{H}\left(\phi^E(\vec{x},\tau),\pi^E(\vec{x},\tau)\right) =$$

$$= i\pi^E(\vec{x},\tau)\partial_\tau\phi^E(\vec{x},\tau) - \frac{1}{4c}\pi_E^2 - c\left(\vec{\nabla}\phi^E\right)^2 - V(\phi^E) = \qquad (\mathbf{A}.59)$$

$$= -\frac{1}{4c}\left(\pi_E^2 - 4ic\partial_\tau\phi^E\pi^E\right) - c\left(\vec{\nabla}\phi^E\right)^2 - V(\phi^E) = \qquad (\mathbf{A}.60)$$

$$= -\frac{1}{4c}\left(\pi^E - 2ic\partial_\tau\phi^E\right)^2 - c\left(\partial_\tau\phi^E\right)^2 - c\left(\vec{\nabla}\phi^E\right)^2 - V(\phi^E) = \qquad (\mathbf{A}.61)$$

$$= -\frac{1}{4c}\left(\pi^E - 2ic\partial_\tau\phi^E\right)^2 - c\left(\partial_\mu^E\phi^E\delta^{\mu\nu}\partial_\nu^E\phi^E\right)^2 - V(\phi^E) \qquad (\mathbf{A}.62)$$

Die Integration über π in (**A**.52) ergibt also

$$\boxed{< \phi', -i\tau|\tilde{\phi}, i\tau > \propto \int \mathrm{D}\phi^E e^{\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}^3\vec{x}\left(-c\left(\partial_\mu^E\phi^E\delta^{\mu\nu}\partial_\nu^E\phi^E\right)^2 - V(\phi^E)\right)} \equiv \int \mathrm{D}\phi^E e^{-S^E[\phi^E;-\tau,\tau)}} \qquad (\mathbf{A}.63)$$

Dazu haben wir definiert

$$S^E[\phi^E;-\tau,\tau) = \int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}^3\vec{x}\left(c\left(\partial_\mu^E\phi^E\delta^{\mu\nu}\partial_\nu^E\phi^E\right)^2 + V(\phi^E)\right) \qquad (\mathbf{A}.64)$$

[2] Der Schritt von (**A**.47) zu (**A**.48) auf der vorherigen Seite setzt eine gewisse Anordnung der Operatoren in $\hat{H}$ voraus. Auch auf diese Problematik soll hier nicht eingegangen werden, da sie wie im Minkowskischen Pfadintegral behandelt werden kann. Im darauffolgenden Schritt werden eventuelle Konstanten 2π nicht berücksichtigt. Diese seien in das Funktionalintegralmaß $\mathrm{d}\pi_n$ integriert. Beachte außerdem, daß ϕ_n, wann immer es außerhalb von Zustandsvektorklammern $|\ldots>$ ohne Argumente auftaucht, als Funktion des Ortes $\vec{x}$ zu verstehen ist.

A.2 Euklidisierung der Worldsheet-Metrik

Wir wollen nun die Euklidisierung anwenden auf das Polyakov-Pfadintegral. Dort sind die Raumzeit-Koordinaten X^μ Skalarfelder auf dem zweidimensionalen Worldsheet mit der Metrik h_{ab}.

Die klassische Polyakov-Wirkung für den bosonischen String ist von der Form

$$S_{p0}[X,h] = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{ab}\partial_a X^\mu \eta_{\mu\nu}\partial_b X^\nu \qquad (\mathbf{A}.65)$$

In Abschnitt 1.2 auf Seite 10 beginnen wir mit der klassischen euklidischen Polyakov-Wirkung

$$S^E_{p0}[X,g] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}g^{ab}\partial_a X^\mu \delta_{\mu\nu}\partial_b X^\nu \qquad (\mathbf{A}.66)$$

und argumentieren, daß die durch Hintergrundfelder erweiterte euklidischen klassischen Polyakov-Wirkung

$$S^E_p[X,g] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left\{g^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) - i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha'\Phi(X)R_g\right\} \qquad (\mathbf{A}.67)$$

eine Basis für ein erzeugendes Funktional für die Greensfunktionen der ursprünglichen euklidischen Wirkung S^E_{p0} bildet. Wir werden in diesem Abschnitt ausgehen von der durch Hintergrundfelder erweiterten minkowskischen klassischen Polyakov-Wirkung

$$S_p[X,h] = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\left\{h^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha'\Phi(X)R_g\right\} \qquad (\mathbf{A}.68)$$

und zeigen, daß diese durch Euklidisierung in (**A**.67) übergeht (Das impliziert natürlich auch den Übergang der ursprünglichen Polyakov-Wirkung (**A**.65) nach (**A**.66)).

Vergleichen wir zu Beginn noch einmal die Lagrangedichte aus (**A**.65) mit flacher Worldsheet-Metrik η_{ab} mit der Lagrangedichte (**A**.53)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\right) &= -c\cdot\partial_\mu\phi(x)\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(\vec{x},t) - V\left(\phi(x)\right) & (\mathbf{A}.69)\\
\mathcal{L}\left(X^\mu(\sigma),\partial_a X^\mu(x)\right) &= -\eta_{\mu\nu}\frac{1}{4\pi\alpha'}\partial_a X^\mu(\sigma)\eta^{ab}\partial_b X^\nu(\sigma) & (\mathbf{A}.70)
\end{aligned}$$

des Skalarfelds, so erkennt man, daß die Lagrangedichte des Strings aus einer Summe von Skalarfeld-Lagrangedichten besteht (wobei die griechischen Indizes der Skalarfelddichte zu lateinischen Indizes werden). Jedoch mit einem wesentlichen Unterschied: Ein Summand (für $\eta_{\mu\nu} = \eta_{00}$ bei der String-Lagrangedichte) geht mit anderem Vorzeichen ein. Dies verursacht Probleme bei der Argumentation in Abschnitt A.1.2. Dasselbe gilt auch für die erweiterte Polyakov-Wirkung. Um dieses zu umgehen, werden wir als erstes die **Raumzeit-Metrik euklidisieren**! Diese Euklidisierung ist jedoch völlig verschieden von der Euklidisierung der Worldsheet-Metrik. Betrachten wir dazu noch einmal die n-Punkt-Korrelationsfunktion (**A**.1) auf Seite 67, die noch das minkowskische Pfadintegral enthält und Ausgangspunkt unserer Überlegungen war. Die entsprechende Korrelationsfunktion in der Stringtheorie ist ein Funktional der Raumzeit-Metrik G. Wir gehen davon aus, daß diese funktionale Abhängigkeit von reell-analytischer Form ist. Ursprünglich ist dieses Funktional definiert für minkowskische Metriken. Wir setzen diesen Definitionsbereich fort auf beliebige Metriken, rechnen dann ausschließlich mit euklidischen Metriken, und könnten am Ende (falls wir wollten) das Ergebnis wieder analytisch fortsetzen und minkowskische Metriken einsetzen. Diese Euklidisierung der Raumzeit-Metrik erklärt das $\delta_{\mu\nu}$ in (**A**.66).

Ein weiterer Unterschied der Polyakov-Lagrange-Dichte zur Skalarfeld-Dichte besteht darin, daß wir im Allgemeinen keine flache Metrik η_{ab} haben, sondern beliebige minkowskische Metriken zulassen wollen. Hier können wir aber die Tatsache verwenden, daß die Quantisierung die Diffeomorphismeninvarianz auf dem Worldsheet erhält (es werden Diffeomorphismen-invariante Regularisierungen benützt), und wir deshalb dort zur konformen Eichung übergehen können (siehe dazu Abschnitt E.2.2 im Anhang, auf Seite 89)

$$\begin{aligned}
h_{ab} &= e^{2\alpha}\eta_{ab} & (\mathbf{A}.71)\\
h^{ab} &= e^{-2\alpha}\eta^{ab} & (\mathbf{A}.72)\\
\sqrt{-h} &= e^{2\alpha} & (\mathbf{A}.73)\\
R_h &= 2e^{-2\alpha}\left(\alpha_{,00} - \alpha_{,11}\right) & (\mathbf{A}.74)
\end{aligned}$$

In dieser Eichung kann fast genauso vorgegangen werden, wie beim Skalarfeld im Vierdimensionalen. Nach erfolgter Euklidisierug kann dann erneut die Diffeomorphismeninvarianz ausgenützt werden, um zu allgemeinen Worldsheet-Metriken zurückzukehren.

Steigen wir also in der vorangegegangenen Skalarfeld-Rechnung bei (**A**.53) ein und wählen stattdessen die Lagrange-Dichte eines Strings in allgemeinem Hintergrund in konformer Eichung

$$\mathcal{L}\left(X(\sigma),\partial_a X(\sigma)\right) = -\frac{\sqrt{-h}}{4\pi\alpha'}\left(h^{ab}\partial_a X^\mu G_{\mu\nu}(X)\partial_b X^\nu + \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{-h}}\partial_a X^\mu B_{\mu\nu}(X)\partial_b X^\nu + \alpha' R_h \Phi(X)\right) = \quad (\mathbf{A}.75)$$
$$= -\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(\eta^{ab}\partial_a X^\mu G_{\mu\nu}(X)\partial_b X^\nu + \epsilon^{ab}\partial_a X^\mu B_{\mu\nu}(X)\partial_b X^\nu + e^{2\alpha}\alpha' R_h \Phi(X)\right) \quad (\mathbf{A}.76)$$

Dann ist

$$\pi_\nu(\sigma) = \frac{\partial\mathcal{L}\left(X(\sigma),\partial_a X(\sigma)\right)}{\partial(\partial_0 X^\nu(\sigma))} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(2\eta^{a0}\partial_a X^\mu G_{\mu\nu}(X) + 2\epsilon^{a0}\partial_a X^\mu B_{\mu\nu}(X)\right) = \quad (\mathbf{A}.77)$$
$$= \frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\partial_0 X^\mu G_{\mu\nu}(X) + \partial_1 X^\mu B_{\mu\nu}(X)\right) \quad (\mathbf{A}.78)$$
$$\partial_0 X^\lambda(\sigma) = G^{\lambda\nu}\left(2\pi\alpha'\cdot\pi_\nu(\sigma) - \partial_1 X^\mu B_{\mu\nu}(X)\right) \quad (\mathbf{A}.79)$$

und somit

$$\mathcal{H}\left(X(\sigma),\pi(\sigma)\right) =$$
$$= \pi_\nu(\sigma)\partial_0 X^\nu(\sigma) - \mathcal{L}\left(X(\sigma),\partial_a X(\sigma)\right) = \quad (\mathbf{A}.80)$$
$$= \pi_\nu\partial_0 X^\nu + \frac{1}{4\pi\alpha'}\left(-\partial_0 X^\mu G_{\mu\nu}(X)\partial_0 X^\nu + \partial_1 X^\mu G_{\mu\nu}(X)\partial_1 X^\nu + \right.$$
$$\left. + \partial_0 X^\mu B_{\mu\nu}(X)\partial_1 X^\nu - \partial_1 X^\mu B_{\mu\nu}(X)\partial_0 X^\nu + e^{2\alpha}\alpha' R_h \Phi(X)\right) = \quad (\mathbf{A}.81)$$
$$= \pi_\nu G^{\nu\lambda}\left(2\pi\alpha'\cdot\pi_\lambda - \partial_1 X^\rho B_{\rho\lambda}\right) +$$
$$+\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(-G^{\mu\lambda}\left(2\pi\alpha'\cdot\pi_\lambda - \partial_1 X^\rho B_{\rho\lambda}\right)G_{\mu\nu}G^{\nu\alpha}\left(2\pi\alpha'\cdot\pi_\alpha - \partial_1 X^\beta B_{\beta\alpha}\right) + \partial_1 X^\mu G_{\mu\nu}\partial_1 X^\nu + \right.$$
$$\left. + G^{\mu\lambda}\left(2\pi\alpha'\cdot\pi_\lambda - \partial_1 X^\rho B_{\rho\lambda}\right)B_{\mu\nu}\partial_1 X^\nu - \partial_1 X^\mu B_{\mu\nu}G^{\nu\alpha}\left(2\pi\alpha'\cdot\pi_\alpha - \partial_1 X^\beta B_{\beta\alpha}\right) + e^{2\alpha}\alpha' R_h\Phi\right) \quad (\mathbf{A}.82)$$
$$= \pi\alpha'\left(\pi_\mu G^{\mu\lambda}\pi_\lambda + \frac{1}{\pi\alpha'}G^{\mu\lambda}\pi_\lambda B_{\mu\nu}\partial_1 X^\nu\right) +$$
$$+\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(\partial_1 X^\mu\left(G_{\mu\beta} + B_{\mu\nu}G^{\nu\alpha}B_{\beta\alpha}\right)\partial_1 X^\beta + e^{2\alpha}\alpha' R_h\Phi\right) \quad (\mathbf{A}.83)$$

Der dem Exponenten in (**A**.52) entsprechende Ausdruck ist

$$i\pi^E_\nu(\sigma^1,\sigma^2)\partial_2 X^\nu_E(\sigma^1,\sigma^2) - \mathcal{H}\left(X^E(\sigma^1,\sigma^2),\pi^E(\sigma^1,\sigma^2)\right) =$$
$$= -\pi\alpha'\left(\pi^E_\mu G^{\mu\lambda}\pi^E_\lambda + \frac{1}{\pi\alpha'}G^{\mu\lambda}\pi^E_\lambda B_{\mu\nu}\partial_1 X^\nu_E - \frac{i}{\pi\alpha'}\pi^E_\nu\partial_2 X^\nu_E\right) -$$
$$-\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(\partial_1 X^\mu_E\left(G_{\mu\beta} + B_{\mu\nu}G^{\nu\alpha}B_{\beta\alpha}\right)\partial_1 X^\beta_E + e^{2\alpha}\alpha' R_h\Phi\right) = \quad (\mathbf{A}.84)$$
$$= -\pi\alpha'\left(\pi^E_\mu + \frac{1}{2\pi\alpha'}B_{\mu\rho}\partial_1 X^\rho_E - \frac{i}{2\pi\alpha'}G_{\mu\rho}\partial_2 X^\rho_E\right)G^{\mu\lambda}\left(\pi^E_\lambda + \frac{1}{2\pi\alpha'}B_{\lambda\nu}\partial_1 X^\nu_E - \frac{i}{2\pi\alpha'}G_{\lambda\nu}\partial_2 X^\nu_E\right) +$$
$$+\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(B\partial_1 X_E - iG\partial_2 X_E\right)^T G^{-1}\left(B\partial_1 X_E - iG\partial_2 X_E\right) -$$
$$-\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(\partial_1 X^T_E\left(G - BG^{-1}B\right)\partial_1 X_E + e^{2\alpha}\alpha' R_h\Phi\right) \quad (\mathbf{A}.85)$$

Die Integration über π in (**A**.52) ergibt also

$$< X', -i\tau|\tilde{X}, i\tau > \propto$$
$$\propto \int \mathrm{D}X^E e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{-\tau}^{\tau}d\sigma^2\int d\sigma^1\left(\partial_1 X^T_E\left(G-BG^{-1}B\right)\partial_1 X_E - \left(B\partial_1 X_E - iG\partial_2 X_E\right)^T G^{-1}\left(B\partial_1 X_E - iG\partial_2 X_E\right) + e^{2\alpha}\alpha' R_h\Phi\right)} \quad (\mathbf{A}.86)$$

$$= \int \mathrm{D}X^E e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{d}\sigma^2 \int \mathrm{d}\sigma^1 \left(\partial_1 X_E^T G \partial_1 X_E + \partial_2 X_E^T G \partial_2 X_E + i\partial_2 X_E^T B \partial_1 X_E - i\partial_1 X_E^T B \partial_2 X_E + e^{2\alpha}\alpha' R_h \Phi\right)} = \quad (\mathbf{A}.87)$$

$$= \int \mathrm{D}X^E e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{d}\sigma^2 \int \mathrm{d}\sigma^1 \left(\delta^{ab}\partial_a X_E^\mu G_{\mu\nu}\partial_b X_E^\nu - i\epsilon^{ab}\partial_a X_E^\mu B_{\mu\nu}\partial_b X_E^\nu + e^{2\alpha}\alpha' R_h \Phi\right)} = \quad (\mathbf{A}.88)$$

$$= \int \mathrm{D}X^E e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{d}\sigma^2 \int \mathrm{d}\sigma^1 e^{2\alpha}\left(e^{-2\alpha}\delta^{ab}\partial_a X_E^\mu G_{\mu\nu}\partial_b X_E^\nu - i\frac{\epsilon^{ab}}{e^{2\alpha}}\partial_a X_E^\mu B_{\mu\nu}\partial_b X_E^\nu + \alpha' R_h \Phi\right)} \equiv \quad (\mathbf{A}.89)$$

$$\equiv \int \mathrm{D}X^E e^{-S_p^E[X^E;-\tau,\tau)} \quad (\mathbf{A}.90)$$

Das euklidische ϵ_{ab} (also mit $a, b \in \{1,2\}$) sei nach wie vor durch die Signatur der Permutation definiert. Also

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$$

Definiert man die euklidische Metrik

$$g_{ab} \equiv e^{2\alpha}\delta_{ab} \quad (\mathbf{A}.91)$$

und den euklidischen antisymmetrischen ε-(Pseudo-)Tensor

$$\varepsilon^{ab} \equiv \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}} \quad (\mathbf{A}.92)$$

dann nimmt die euklidische Wirkung die folgende Form an (Den Index ^{E} wollen wir in Zukunft weglassen. Man erkennt die euklidische Wirkung dann daran, daß g statt h als Worldsheet-Metrik auftaucht):

$$\boxed{S_p[X;-\tau,\tau) = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{d}\sigma^2 \int \mathrm{d}\sigma^1 \sqrt{g}\left(g^{ab}\partial_a X^\mu G_{\mu\nu}\partial_b X^\nu - i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu B_{\mu\nu}\partial_b X^\nu + \alpha' R_h \Phi\right)} \quad (\mathbf{A}.93)$$

Das Ergebnis entspricht wieder der Merkregel, überall σ^0 durch $-i\sigma^2$ zu ersetzen:

$$iS_p[X,\eta] = -\frac{i}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma \left\{\eta^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha'\Phi(X)R_h\right\} = \quad (\mathbf{A}.94)$$

$$= -\frac{i}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}\sigma^0 \mathrm{d}\sigma^1 \{-\partial_0 X^\mu \partial_0 X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \partial_1 X^\mu \partial_1 X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \partial_0 X^\mu \partial_1 X^\nu B_{\mu\nu}(X) - \partial_1 X^\mu \partial_0 X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha'\Phi(X)R_h\} \quad (\mathbf{A}.95)$$

$$\rightarrow$$

$$-S_p^E[\eta,X] = -\frac{i}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}\big(-i\sigma^2\big)\,\mathrm{d}\sigma^1 \{-i\partial_2 X^\mu i\partial_2 X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \partial_1 X^\mu \partial_1 X^\nu G_{\mu\nu}(X) + i\partial_2 X^\mu \partial_1 X^\nu B_{\mu\nu}(X) - \partial_1 X^\mu i\partial_2 X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha'\Phi(X)R_h\} = \quad (\mathbf{A}.96)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma \left\{\delta^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) - i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha'\Phi(X)R_h\right\} \quad (\mathbf{A}.97)$$

Besonders zu beachten ist hier der extra Vorfaktor $-i$ vorm Axionterm

$$\epsilon_{ab} \rightarrow -i\epsilon_{ab} \quad (\mathbf{A}.98)$$

Anhang B

Klassische Bewegungsgleichung

Betrachte die euklidische verallgemeinerte Polyakov-Wirkung

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \Big\{ g^{ab} \underbrace{\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu}_{=\nabla_a X^\mu \nabla_b X^\nu} G_{\mu\nu}(X) - \frac{i\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha' \Phi(X) R_g \Big\} \qquad (\mathbf{B}.1)$$

Es ist sicher berechtigt, nach dem physikalischen Sinn von "klassischen Bewegungsgleichung" für die euklidische Wirkung zu fragen, wo doch die Euklidisierung nur durch die Quantisierung motiviert wurde. Es geht hier jedoch eigentlich um die Berechnung der Gaußschen Näherung des euklidischen Pfadintegrals, für die wir die euklidische Wirkung um $\bar{X}$, der Lösung von $\delta_X S_p[X] = 0$ (und diese Gleichung nennen wir "klassische Bewegungsgleichung"), entwickeln. Will man wirklich die klassischen Bewegungsgleichungen (für die minkowskische Metrik), so hat man im Ergebnis g_{ab} durch h_{ab} und ε^{ab} durch $i\varepsilon^{ab}$ zu ersetzen.

Wenn man die Lagrangedichten der Raumzeit-Metrik bzw. des Dilatonfeldes als Funktionen der kovarianten Ableitungen der Felder (und natürlich der Felder selbst) betrachtet, kann man die Variation des entsprechenden Teils der Wirkung folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{G;\Phi}[X]}{\delta X^\lambda} &= \sqrt{g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{G;\Phi}(X, \nabla_\rho X)}{\partial X^\lambda} - \nabla_c \frac{\partial \mathcal{L}_{G;\Phi}(X, \nabla_\rho X)}{\partial(\nabla_c X^\lambda)} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{g}}{4\pi\alpha'} \left\{ g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu,\lambda} + \alpha' \Phi_{,\lambda} R_g - \nabla_c (2\nabla^c X^\mu G_{\mu\lambda}) \right\} \\
&= \frac{\sqrt{g}}{4\pi\alpha'} \left\{ \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu G_{\mu\nu,\lambda} + \alpha' \Phi_{,\lambda} R_g - 2\Box_g X^\mu G_{\mu\lambda} - 2\nabla_c X^\nu \nabla^c X^\mu G_{\mu\lambda,\nu} \right\} \\
&= \frac{\sqrt{g}}{4\pi\alpha'} \left\{ \alpha' \Phi_{,\lambda} R_g - 2\Box_g X^\mu G_{\mu\lambda} - 2\nabla_c X^\nu \nabla^c X^\mu G_{\alpha\lambda} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \right\}
\end{aligned} \qquad (\mathbf{B}.2)$$

wobei hier die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{G;\Phi}$ die entsprechenden Terme des Integranden ohne den Faktor $\sqrt{g}$ (aber mit dem Vorfaktor $-\frac{1}{4\pi\alpha'}$) darstellt.
Zur Abwechslung gehen wir bei dem Term der Lagrangedichte, der B enthält, einen anderen Weg. Wir sehen die Lagrange-Dichte als Funktion der partiellen Ableitung, nehmen dann aber den Vorfaktor $\sqrt{g}$ zur Lagrangedichte dazu (Das kürzt gerade den Faktor $1/\sqrt{g}$ in besagtem Term):

$$\frac{\delta S_B[X]}{\delta X^\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}_B(X, \partial_\rho X)}{\partial X^\lambda} - \partial_c \frac{\partial \mathcal{L}_B(X, \partial_\rho X)}{\partial(\partial_c X^\lambda)} \qquad (\mathbf{B}.3)$$

Setzt man also $\mathcal{L}_B = -\frac{i}{4\pi\alpha'} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X)$ oben ein, erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_B[X]}{\delta X^\lambda} &= -\frac{i}{4\pi\alpha'} \Big\{ \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu,\lambda} \quad \underbrace{-\partial_c(-2\epsilon^{ca} \partial_a X^\mu B_{\mu\lambda})}_{=2\epsilon^{ca}(\partial_c \partial_a X^\mu B_{\mu\lambda} + \partial_a X^\mu \partial_c X^\nu B_{\mu\lambda,\nu})} \quad \Big\} = \\
&= -\frac{i}{4\pi\alpha'} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu (B_{\mu\nu,\lambda} - 2B_{\mu\lambda,\nu}) = -\frac{i}{4\pi\alpha'} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu H_{\mu\nu\lambda}
\end{aligned} \qquad (\mathbf{B}.4)$$

Die Funktionalableitung der gesamten Wirkung ist dann die Summe von (**B**.2) und (**B**.4)

$$\frac{\delta S[X]}{\delta X^\lambda(\sigma)} = \frac{\sqrt{g}}{4\pi\alpha'}\left\{-2G_{\mu\lambda}\Box_g X^\mu - 2\partial_c X^\nu \partial^c X^\mu G_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu H_{\mu\nu\lambda} + \alpha'\Phi_{,\lambda}R_g\right\} \tag{B.5}$$

wobei

$$\varepsilon^{ab} = \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}} \tag{B.6}$$

Die **klassischen Bewegungsgleichungen** für die euklidische Wirkung sind somit

$$\boxed{2G_{\alpha\lambda}\left(\Box_g X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_c X^\mu \partial^c X^\nu\right) + i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu H_{\mu\nu\lambda} - \alpha'\Phi_{,\lambda}R_g = 0} \tag{B.7}$$

bzw.

$$\boxed{\Box_g X^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_c X^\mu \partial^c X^\nu - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu H_{\mu\nu}{}^\alpha + \frac{\alpha'}{2}\Phi^{,\alpha}R_g} \tag{B.8}$$

Anhang C

Mehrdimensionale Gauß-Integrale und Funktionaldeterminanten

C.1 Bosonische Variablen

(siehe z.B. [GR, S.408], [Kug, S.82],[Pok, S.89],[PS, S.286,287])
Seien v_i bosonische (kommutierende) reelle Variablen und A eine symmetrische positiv definite quadratische Matrix. Dann gilt

$$\int \mathrm{d}^D v e^{-\frac{1}{2}v^T A v} = (2\pi)^{D/2} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\ln A} = \frac{(2\pi)^{D/2}}{\sqrt{\det A}} \tag{C.1}$$

$$\int \mathrm{d}^D v e^{-\frac{1}{2}v^T A v + \rho^T v} = \frac{(2\pi)^{D/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}\rho^T A^{-1}\rho} \tag{C.2}$$

(für nicht symmetrische Matrizen erhält man nur die Determinante des symmetrischen Anteils)
Sind w_i ebenfalls reelle bosonische Variablen, so gilt dann für eine (nicht mehr unbedingt symmetrische) Matrix A

$$\int \mathrm{d}^D v \mathrm{d}^D w e^{-v^T A w} = \int \mathrm{d}^D v \mathrm{d}^D w \exp\left\{-\frac{1}{2}(v^T, w^T)\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\right\} \overset{(\mathrm{C}.2)}{=} \frac{(2\pi)^D}{\sqrt{(-1)^D (\det A)^2}} \tag{C.3}$$

also für gerades D

$$\int \mathrm{d}^D v \mathrm{d}^D w e^{-v^T A w} = \frac{(2\pi)^D}{\det A} \tag{C.4}$$

Im Komplexen gilt entsprechend für positiv definites A

$$\int \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}\bar{z}_1 \ldots \mathrm{d}z_D \mathrm{d}\bar{z}_D e^{-z^\dagger A z} = \frac{(2\pi)^D}{\det A} \tag{C.5}$$

wobei die Integrationen über die komplexe Ebene wie folgt definiert seien

$$\int \mathrm{d}z \mathrm{d}\bar{z} f(z,\bar{z}) \equiv 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Re(z) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Im(z) f(z,\bar{z}) \tag{C.6}$$

Betrachte nun wieder reelle Variablen, jetzt mit einer positiv semidefiniten Matrix. Wir wechseln mit einer orthogonalen Matrix O in eine Basis von Eigenzuständen. Die entsprechende Variablentransformation ist

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= Ov && \text{(C.7)} \\ \tilde{A} &= OAO^T = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_{D'}, 0, \ldots, 0) && \text{(C.8)} \\ \text{mit } \lambda_i &> 0 \quad \forall i \le D' && \text{(C.9)} \\ \text{und } \det O &= 1 && \text{(C.10)} \end{aligned}$$

Damit wird (**C**.1) zu

$$\int \mathrm{d}^D v e^{-\frac{1}{2}v^T A v} = \int \mathrm{d}^D \tilde{v} e^{-\frac{1}{2}\tilde{v}^T \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_{D'},0,\ldots,0)\tilde{v}} \tag{C.11}$$

$$= \underbrace{\int \mathrm{d}\tilde{v}_{D'+1}\ldots \mathrm{d}\tilde{v}_D}_{V_{Null}} \int \mathrm{d}\tilde{v}_1 \ldots \mathrm{d}\tilde{v}_{D'} e^{-\frac{1}{2}\tilde{v}'^T \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_{D'})\tilde{v}'} = \tag{C.12}$$

$$= V_{Null}\frac{(2\pi)^{D'/2}}{\sqrt{\det' A}} \tag{C.13}$$

wobei $\det' A$ das Produkt aller nichtverschwindenden (positiven) Eigenwerte ist. Entsprechend wird (**C**.2) zu

$$\int \mathrm{d}^D v e^{-\frac{1}{2}v^T A v+\rho^T v} = V_{Null}\frac{(2\pi)^{D/2}}{\sqrt{\det' A}} e^{\frac{1}{2}\rho^T A^{-1}\rho} \tag{C.14}$$

Für Pfadintegrale gilt analog (für O symmetrisch)

$$\boxed{\int \mathrm{D}x e^{-\frac{1}{2}(x,Ox)+(j,x)} \propto \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,' O}} e^{\frac{1}{2}(j,O^{-1}j)}} \tag{C.15}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(x,y) \equiv \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{g} x^\mu G_{\mu\nu}(\bar{X}) y^\nu \tag{C.16}$$

Die Definition der Funktionaldeterminante $\mathrm{Det}\, A$ bzw. $\mathrm{Det}\,' A$ mittels der verallgemeinerten ζ-Funktion wird in Anhang D behandelt.

C.2 Grassman-Variablen

(siehe z.B. [Nak, S.8],[GR, S.480],[Kug, S.105][Pol, S.344,345][Pok, S.100ff])
Seien c_i Grassmann-Variablen, also antikommutierend.

$$\{c_i, c_j\} = 0 \tag{C.17}$$

Das Integral wird dann definiert über

$$\int \mathrm{d}c_i \equiv 0 \qquad \int \mathrm{d}c_i c_j \equiv 0 \tag{C.18}$$

Die Ableitung muß

$$\left\{\frac{\partial}{\partial c_i}, c_j\right\} = \delta_{ij} \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial c_i}, \frac{\partial}{\partial c_j}\right\} = 0 \tag{C.19}$$

erfüllen.
Zwischen der Determinante einer antisymmetrischen Matrix und dem Integral über Grassman-Variablen gilt folgende Beziehung:

$$\int \mathrm{d}c_n \ldots \mathrm{d}c_1 e^{-\frac{1}{2}c^T A c} = \sqrt{\det A} = \exp\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\ln A \tag{C.20}$$

Bilden b_i einen weiteren Satz von Grassmann-Variablen, dann gilt (für allgemeine Matrizen A)

$$\int \mathrm{d}b_n \ldots \mathrm{d}b_1 \mathrm{d}c_n \ldots \mathrm{d}c_1 e^{-\frac{1}{2}b^T A c} = \det A = \exp \mathrm{tr}\,\ln A \tag{C.21}$$

oder komplex

$$\int \mathrm{d}\bar{c}_n \ldots \mathrm{d}\bar{c}_1 \mathrm{d}c_n \ldots \mathrm{d}c_1 e^{-\frac{1}{2}c^\dagger A c} = \det A = \exp \operatorname{tr} \ln A \tag{C.22}$$

Entsprechendes gilt auch wieder für Pfadintegrale, z.B.

$$\boxed{\int \mathrm{D}b\mathrm{D}c e^{-\frac{1}{2}b^T O c} \propto \operatorname{Det} O} \tag{C.23}$$

Anhang D

ζ-Funktions-Regularisierung von Funktionaldeterminanten

D.1 Verallgemeinerte ζ-Funktion und ζ-regularisierte Funktionaldeterminante

(siehe z.B. [BCVZ96, Haw77])
Betrachten wir einen positiv definiten Operator O (für positiv semidefinite Operatoren siehe Abschnitt D.5 auf Seite 87) mit noch eventuell vorhandenen diskreten Indizes. Seine Determinante ist formal definiert als

$$\mathrm{Det}\,(O) \stackrel{\text{formal}}{\equiv} \prod_n \lambda_n \qquad (\mathbf{D}.1)$$

bzw.

$$\ln(\mathrm{Det}\,(O)) \stackrel{\text{formal}}{\equiv} \sum_n \ln \lambda_n \qquad (\mathbf{D}.2)$$

wobei λ_n die Eigenwerte von O sind. Im Allgemeinen ist das jedoch eine divergente Summe, weshalb der Ausdruck regularisiert werden muß. Zu diesem Zweck definiert man die **verallgemeinerte Zeta-Funktion**

$$\zeta_O(s) \equiv \sum_n \lambda_n^{-s} \qquad (\mathbf{D}.3)$$

(Vergleiche: Riemannsche ζ-Funktion: $\zeta(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n^{-s}$)
Mit dieser Definition gilt formal

$$\boxed{\zeta_O'(0) = -\ln(\mathrm{Det}\,(O))} \qquad (\mathbf{D}.4)$$

Diese Gleichung soll als Definition der ζ-regularisierten Funktionaldeterminante dienen. Eine integrale Darstellung der ζ-Funktion ist (Mellin-Transformation, siehe z.B. [Haw77, S.140],[BCVZ96, S.109])

$$\zeta_O(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \mathrm{Tr} \int_0^\infty dt\, t^{s-1} e^{-tO} \qquad (\mathbf{D}.5)$$

Von der Richtigkeit dieser Beziehung kann man sich überzeugen, wenn man die Spur als Summe über die Eigenwerte schreibt. Dann steht auf der rechten Seite

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1} \sum_n e^{-t\lambda_n} \stackrel{t_n = \lambda_n t}{=} \sum_n \frac{1}{\Gamma(s)} \lambda_n^{-s} \underbrace{\int_0^\infty dt_n\, t_n^{s-1} e^{-t_n}}_{\Gamma(s)} = \sum_n \lambda_n^{-s} = \zeta_O(s) \qquad (\mathbf{D}.6)$$

Um (**D**.5) zu berechnen definieren wir noch den **Heat-Kernel**[1]

$$K(\sigma.\sigma';t) \equiv < \sigma|e^{-t\hat{O}}|\sigma' > \stackrel{\text{formal}}{=} e^{-tO}\delta(\sigma-\sigma') \qquad (\mathbf{D}.7)$$

Dieser trägt ebenfalls noch eventuelle diskrete Indizes. Es wird dann aus (**D**.5)

$$\zeta_O(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int d^2\sigma \int_0^\infty dt t^{s-1} \mathrm{tr}\, K(\sigma,\sigma;t) \qquad (\mathbf{D}.8)$$

wobei tr nur über die eventuell vorhandenen diskreten Indizes läuft. Der Heat-Kernel erfüllt die **Wärmeleitungsgleichung** (Heat Equation)

$$\partial_t K(\sigma,\sigma';t) = -OK(\sigma,\sigma';t) \qquad (\mathbf{D}.9)$$

Als Lösungsansatz verwendet man die **Seeley-DeWitt-Entwicklung** (Heat-Kernel-Entwicklung)

$$K(\sigma,\sigma';t) = \frac{e^{-\frac{d(\sigma,\sigma')}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\sigma,\sigma')t^k \qquad (\mathbf{D}.10)$$

wobei $d(\sigma,\sigma')$ der **geodätische Abstand** und d die Dimension der Mannigfaltigkeit, in unserem Falle also die Worldsheet-Dimension 2 ist. Die Koeffizienten a_k nennt man Seeley-DeWitt-Koeffizienten. Sie können für einige Operatoren nachgeschlagen werden (z.B. [WW94, S.157],[BCVZ96, S.104]).

Damit nimmt die ζ-Funktion folgende Form an

$$\boxed{\zeta_O(s) = \tfrac{1}{4\pi\Gamma(s)}\int d^2\sigma \int_0^\infty dt \sum_{k=0}^\infty \mathrm{tr}\, a_k(\sigma,\sigma)t^{s+k-2}} \qquad (\mathbf{D}.11)$$

D.2 Globale Skalierung des Operators

Aus der Definition (**D**.3) oder auch aus (**D**.5) ist ferner ersichtlich:

$$\zeta(\lambda O)(s) = \lambda^{-s}\zeta_O(s) \qquad (\mathbf{D}.12)$$

$$\Rightarrow \quad \overbrace{\frac{d}{ds}\zeta_{\lambda O}(s)\Big|_{s=0}}^{-\ln\det(\lambda O)} = -\ln\lambda\cdot\zeta_O(0) + \underbrace{\zeta_O'(0)}_{-\ln\det(O)} \qquad (\mathbf{D}.13)$$

Also gilt

$$\boxed{\tfrac{d}{d\lambda}\ln(\det(\lambda O)) = \tfrac{1}{\lambda}\zeta_O(0)} \qquad (\mathbf{D}.14)$$

Eine ähnliche Gleichung gilt auch für eine lokale Skalierung $\alpha(\sigma)$ (siehe (**D**.29)) statt globaler Skalierung λ . Man sollte jedoch der Versuchung widerstehen, sie auf dieselbe Weise herzuleiten. In (**D**.5) ist nämlich eine Variablentrafo der Integrationsvariablen $\tilde{t} = \alpha O$ nicht zulässig, da O auch auf α wirkt. Obwohl sie zum richtigen Ergebnis führen würde, gilt eine (**D**.12) entsprechende Gleichung also leider nicht:

$$\zeta(\alpha O)(s) \neq \int d^2\sigma\, (\alpha(\sigma))^{-s}\, \tilde{\zeta}_{\alpha O}(\sigma,s) \qquad (\mathbf{D}.15)$$

wobei $\tilde{\zeta}_O(\sigma,s)$ die "Dichte" von $\zeta_O(s)$ bezeichnen soll

$$\zeta_O(s) \equiv \int d^2\sigma \tilde{\zeta}_O(\sigma,s) \qquad (\mathbf{D}.16)$$

Eine korrekte Herleitung der Variation der Determinante unter lokaler Skalierung des Operators wird gleich in Abschnitt D.3.1 folgen.

[1] In (**D**.7) führen wir implizit einen abstrakten Hilbertraum ein. Siehe dazu Seite 40. ♣

D.3 Lokale Skalierung des Operators

D.3.1 Skalierung der Form $\alpha(\sigma)O$

Wir wollen die Variation der Determinante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\mathrm{Det}\,\tilde{O} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\zeta_{\tilde{O}}(s) \tag{D.17}$$

unter einer lokalen Skalierung des Operators O

$$\tilde{O} \equiv e^{-2\omega(\sigma)\lambda}O \equiv \alpha(\sigma)O \tag{D.18}$$

berechnen. Wir gehen dabei von der nicht selbstverständlichen Annahme aus, daß man die Ableitungen nach λ und s vertauschen kann. (Besser gesagt, daß man die Ableitung nach λ mit dem Grenzübergang $s \to 0$ vertauschen kann)
Für den skalierten Operator gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\tilde{O} = -2\omega\tilde{O} \tag{D.19}$$

Leiten wir also (**D**.5) nach λ ab

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\zeta_{\tilde{O}}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{Tr}\int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{s-1}e^{-t\tilde{O}} = &(\mathbf{D}.20)\\
&\overset{2,(\mathbf{D}.19)}{=} 2\frac{1}{\Gamma(s)}\mathrm{Tr}\int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^s\omega\,\underbrace{\tilde{O}e^{-t\tilde{O}}}_{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-t\tilde{O}}} = &(\mathbf{D}.21)\\
&\overset{p.I.}{=} -2\frac{1}{\Gamma(s)}\mathrm{Tr}\,\underbrace{\left.\omega t^s e^{-t\tilde{O}}\right|_{t=0}^{\infty}}_{=0} + 2\frac{s}{\Gamma(s)}\mathrm{Tr}\,\omega\int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{s-1}e^{-t\tilde{O}} &(\mathbf{D}.22)
\end{aligned}$$

Definiert man noch die ζ-Funktions-"Dichte" $\tilde{\zeta}_O(\sigma,s)$ über

$$\zeta_O(s) \equiv \int \mathrm{d}^2\sigma\,\tilde{\zeta}_O(\sigma,s) \tag{D.23}$$

so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\zeta_{\tilde{O}}(s) = 2s\int \mathrm{d}^2\sigma\,\omega\tilde{\zeta}_{\tilde{O}}(\sigma,s) \tag{D.24}$$

Ableiten nach s bei $s=0$ ergibt schließlich

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\zeta_{\tilde{O}}(s) = 2\int \mathrm{d}^2\sigma\,\omega\tilde{\zeta}_{\tilde{O}}(\sigma,s) + 2s\int \mathrm{d}^2\sigma\,\omega\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{\zeta}_{\tilde{O}}(\sigma,s)\right|_{s=0} = 2\int \mathrm{d}^2\sigma\,\omega\tilde{\zeta}_{\tilde{O}}(\sigma,0) \tag{D.25}$$

[2] Unter der Spur können Operatoren zyklisch vertauscht werden. Für eine analytische Funktion f eines von einem Parameter λ (oder auch t) abhängigen Operators $A(\lambda)$ gilt somit

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f(A(\lambda)) = \mathrm{Tr}\left(f'(A(\lambda))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}A(\lambda)\right)$$

Begründung: Zuerst f in Potenzreihe entwickeln. Für die einzelnen Potenzen gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(A(\lambda))^n = \sum_{k=0}^{n-1}(A(\lambda))^k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}A(\lambda)\right)(A(\lambda))^{n-1-k}$$

Anschließend verwendet man die Zyklizität der Spur.
Ohne Spur gilt nur

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(A(t)) = f'(A(t))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) \quad \text{falls } \left[A(t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\right] = 0 \quad \clubsuit$$

Um die Analogie zur globalen Skalierung zu verdeutlichen, definieren wir noch

$$\alpha(\sigma) \equiv e^{-2\omega(\sigma)\lambda} \qquad (\mathbf{D}.26)$$

Mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \int \mathrm{d}^2\sigma \frac{\mathrm{d}\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\delta}{\delta\alpha(\sigma)} = -2\int \mathrm{d}^2\sigma\omega\alpha \frac{\delta}{\delta\alpha(\sigma)} \qquad (\mathbf{D}.27)$$

läßt sich aus (**D**.25) auch die Funktionalableitung bezüglich α ablesen. Fassen wir das Ergebnis zusammen:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln \mathrm{Det}\, \left(e^{-2\omega\lambda}O\right) &= -2\int \mathrm{d}^2\sigma\omega\tilde{\zeta}_{e^{-2\omega\lambda}O}(\sigma,0) && (\mathbf{D}.28) \\ \text{bzw. } \frac{\delta}{\delta\alpha(\sigma)} \ln \mathrm{Det}\, (\alpha O) &= \frac{1}{\alpha(\sigma)}\tilde{\zeta}_{\alpha O}(\sigma,0) && (\mathbf{D}.29) \end{aligned}}$$

Die Berechnung der Variation der Determinante reduziert sich also auf die Berechnung von $\zeta_O(0)$, bzw. dessen "Dichte" $\tilde{\zeta}_O(\sigma,0)$. Siehe hierzu Abschnitt D.4.

D.3.2 "Skalierung" der Form $\alpha P_1^\dagger \alpha^{-1} P_1 \alpha$

Betrachte jetzt eine lokale "Skalierung" eines zusammengesetzten Operators von der Form

$$\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1 \equiv \underbrace{\alpha(\sigma)P_1^\dagger}_{\tilde{P}_1^\dagger} \underbrace{\alpha^{-1}(\sigma)P_1\alpha(\sigma)}_{\tilde{P}_1} \equiv e^{-2\omega\lambda}P_1^\dagger e^{2\omega\lambda}P_1 e^{-2\omega\lambda} \qquad (\mathbf{D}.30)$$

Diese spezielle Form taucht im Abschnitt 2.5.3 auf. Der Grund, diesen Fall hier in den Anhang aufzunehmen, ist einerseits, damit der Abschnitt dort übersichtlich bleibt und andererseits, da man an ihm ganz gut die Manipulationsmöglichkeiten bei der Berechnung der Variation der ζ-regularisierten Determinante sehen kann.

Wir benützen im folgenden die spezielle Form von α

$$\begin{aligned} \alpha(\sigma) &\equiv e^{-2\omega(\sigma)\lambda} && (\mathbf{D}.31) \\ \alpha' &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\alpha = -2\omega\alpha && (\mathbf{D}.32) \\ \left(\alpha^{-1}\right)' &= 2\omega\alpha^{-1} && (\mathbf{D}.33) \end{aligned}$$

und gehen zu Beginn wie im vorigen Abschnitt vor

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\zeta_{\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{Tr}\int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{s-1} e^{-t\alpha P_1^\dagger \alpha^{-1} P_1 \alpha} = && (\mathbf{D}.34) \\ &\overset{2}{=} \frac{2}{\Gamma(s)}\mathrm{Tr}\int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^s \left(\omega \underbrace{\alpha P_1^\dagger}_{\tilde{P}_1^\dagger} \underbrace{\alpha^{-1}P_1\alpha}_{\tilde{P}_1} - \underbrace{\alpha P_1^\dagger}_{\tilde{P}_1^\dagger} \omega \underbrace{\alpha^{-1}P_1\alpha}_{\tilde{P}_1} + \underbrace{\alpha P_1^\dagger}_{\tilde{P}_1^\dagger} \underbrace{\alpha^{-1}P_1\alpha}_{\tilde{P}_1} \omega\right) e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} && (\mathbf{D}.35) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die einzelnen Terme getrennt und verwenden dort die Möglichkeit der zyklischen Vertauschung unter der Spur (zyk), und daß $\left[\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1, e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1}\right] = 0 \quad (kom)$. Beachte dabei auch den zweiten Teil der Fußnote 2 auf Seite 84.

Der **erste Term** ist sowieso schon in der gewünschten Form, um den selben Trick wie im letzten Abschnitt anwenden zu können

$$\omega\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1 e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} \overset{(kom)^2}{=} -\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} \qquad (\mathbf{D}.36)$$

Der **dritte Term** ist ähnlich einfach

$$\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1 \omega e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} \overset{(zyk)}{\to} \omega e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} \tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1 \overset{(kom)^2}{=} -\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} \qquad (\mathbf{D}.37)$$

gibt also den selben Beitrag wie der erste Term.
Der **zweite Term** schließlich ist

$$-\tilde{P}_1^\dagger \omega \tilde{P}_1 e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} \stackrel{(zyk)}{\rightarrow} -\omega \tilde{P}_1 e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} \tilde{P}_1^\dagger \tag{D.38}$$

$$= -\omega \tilde{P}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \left(\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1\right)^n \tilde{P}_1^\dagger = \tag{D.39}$$

$$= -\omega \tilde{P}_1 \tilde{P}_1^\dagger \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \left(\tilde{P}_1 \tilde{P}_1^\dagger\right)^n = -\omega \tilde{P}_1 \tilde{P}_1^\dagger e^{-t\tilde{P}_1 \tilde{P}_1^\dagger} = \tag{D.40}$$

$$\stackrel{(kom)^2}{=} \omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-t\tilde{P}_1 \tilde{P}_1^\dagger} \tag{D.41}$$

Damit haben wir schließlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \zeta_{\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1}(s) = \frac{2}{\Gamma(s)} \mathrm{Tr} \int_0^\infty \mathrm{d}t t^s \omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-2e^{-t\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1} + e^{-t\tilde{P}_1 \tilde{P}_1^\dagger}\right) \tag{D.42}$$

Vergleicht man das mit (**D**.21), so folgt sofort das zu (**D**.28) entsprechende Ergebnis

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln \mathrm{Det} \left(e^{-2\omega\lambda} P_1^\dagger e^{2\omega\lambda} P_1 e^{-2\omega\lambda}\right) = -2 \int \mathrm{d}^2\sigma \omega \left(2\tilde{\zeta}_{\tilde{P}_1^\dagger \tilde{P}_1}(\sigma, 0) - \tilde{\zeta}_{\tilde{P}_1 \tilde{P}_1^\dagger}(\sigma, 0)\right)} \tag{D.43}$$

D.4 Berechnung von $\zeta_O(0)$

Erinnern wir uns an die beiden Formeln (**D**.5) und (**D**.11)

$$\zeta_O(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \mathrm{Tr} \int_0^\infty \mathrm{d}t t^{s-1} e^{-tO} \tag{D.5=D.44}$$

$$\zeta_O(s) = \frac{1}{4\pi\Gamma(s)} \int \mathrm{d}^2\sigma \int_0^\infty \mathrm{d}t \sum_{n=0}^\infty \mathrm{tr}\, a_n(\sigma, \sigma) t^{s+n-2} \tag{D.11=D.45}$$

Für $s \to 0$ verhält sich $\Gamma(s)$ wie $1/s$ (siehe (**E**.5))

$$\Gamma(s) \stackrel{s \to 0}{\rightarrow} 1/s \tag{D.46}$$

Wir spalten nun nun die Integration über t in zwei Teile auf, verwenden im ersten Teil (**D**.11=**D**.45) und im zweiten Teil (**D**.5=**D**.44) und in beiden Teilen (**D**.46)

$$\zeta_O(0) = \frac{1}{4\pi} \lim_{s\to 0} s \int \mathrm{d}^2\sigma \int_0^\varepsilon \mathrm{d}t \sum_{n=0}^\infty \mathrm{tr}\, a_n(\sigma, \sigma) t^{s+n-2} + \lim_{s\to 0} s \mathrm{Tr} \int_\varepsilon^\infty \mathrm{d}t t^{s-1} e^{-tO} \tag{D.47}$$

Der Integrand $t^{s-1}e^{-tO}$ im zweiten Term ist im gesamten Integrationsbereich $[\varepsilon, \infty[$ endlich (auch nicht bei ∞, da O positiv definit ist). Somit konvergiert das Integral und der Vorfaktor s läßt diesen Term für $s \to 0$ gegen 0 gehen. Beim ersten Term integrieren wir die Potenzreihe

$$\zeta_O(0) = \frac{1}{4\pi} \lim_{s\to 0} s \int \mathrm{d}^2\sigma \sum_{n=0}^\infty \frac{\varepsilon^{s+n-1}}{s+n-1} \mathrm{tr}\, a_n(\sigma, \sigma) \tag{D.48}$$

Nur der Term mit $n = 1$ hebt den Vorfaktor s auf, alle anderen Terme verschwinden, so daß wir schließlich erhalten

$$\boxed{\zeta_O(0) = \tfrac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{tr}\, a_1(\sigma, \sigma)} \tag{D.49}$$

D.5 Operatoren mit Nullmoden

Wir wollen die Determinante Det′ eines Operators der $\mathcal{N}$ Nullmoden besitzt formal definieren als das Produkt der nichtverschwindenden Eigenwerte

$$\mathrm{Det}\,'O \overset{\text{formal}}{\equiv} \prod_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i \tag{D.50}$$

$$\Rightarrow \quad \ln \mathrm{Det}\,'O \overset{\text{formal}}{\equiv} \sum_{\lambda_i \neq 0} \ln \lambda_i \tag{D.51}$$

Will man die ζ-Funktions-Regularisierung anwenden, befreit man zunächst den (positiv-semidefiniten) Operator von Nullmoden, indem man eine Konstante λ hinzuaddiert

$$O_\lambda \equiv O + \lambda \tag{D.52}$$

Formal erhält man $\ln \mathrm{Det}\, O$, indem man von

$$\ln \mathrm{Det}\, O_\lambda \overset{\text{formal}}{=} \sum_i \ln(\lambda_i + \lambda) = \sum_{\lambda_i \neq 0} \ln(\lambda_i + \lambda) + \mathcal{N} \ln \lambda \tag{D.53}$$

$\mathcal{N} \ln \lambda$ abzieht und anschließend $\lambda \to 0$ gehen läßt.

$$\ln \mathrm{Det}\,'O \overset{\text{formal}}{=} \lim_{\lambda \to 0} \left(\ln \mathrm{Det}\, O_\lambda - \mathcal{N} \ln \lambda \right) \tag{D.54}$$

So motiviert ist es naheliegend, die regularisierte Determinante des Operators zu definieren als (siehe [BCVZ96, S.12])

$$\ln \mathrm{Det}\,'O \equiv - \lim_{\lambda \to 0} \left(\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \right|_{s=0} \zeta_{O_\lambda}(s) + \mathcal{N} \ln \lambda \right) \tag{D.55}$$

Anhang E

Sonstiges

E.1 Ein paar Formeln zur Γ-Funktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}, \mathrm{Re} z > 0 \tag{E.1}$$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right), \gamma = \mathrm{Euler-Konstante} \tag{E.2}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{E.3}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \mathrm{Pole\ \ bei\ \ } 0, -1, -2, ... \tag{E.4}$$

Das Verhalten der Γ-Funktion in der Nähe von 0 ist

$$\Gamma(s) \stackrel{s \to 0}{\to} \frac{1}{s} \tag{E.5}$$

E.2 Christoffel-Symbole und Krümmungstensoren

E.2.1 Allgemeines

Die Christoffelsymbole und Krümmungstensoren seien wie folgt definiert

$$\Gamma^c_{ab} \equiv \frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{ad,b} + g_{bd,a} - g_{ab,d}\right) \tag{E.6}$$

$$R^a_{bcd} \equiv \Gamma^a_{bd,c} + \Gamma^a_{ce}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{bc,d} - \Gamma^a_{de}\Gamma^e_{bc} \tag{E.7}$$

$$R_{bd} \equiv R^a_{bad} \tag{E.8}$$

$$R \equiv g^{bd} R_{bd} \tag{E.9}$$

Aus (**E**.6) folgen noch die nützlichen Relationen

$$\Gamma^a_{ab} = \frac{1}{2} g^{ad} g_{ad,b} = \frac{1}{2}\partial_b g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_b \sqrt{g} \tag{E.10}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_a A^a = \left(\partial_a A^a + \Gamma^a_{ab} A^b\right) = \partial_a A^a + \left(\frac{1}{\sqrt{-h}} \partial_b \sqrt{-h}\right) A^b = \frac{1}{\sqrt{-h}} \partial_a \left(\sqrt{-h} A^a\right) \tag{E.11}$$

In zwei Dimensionen gilt allgemein

$$R^a_{bcd} = \frac{R}{2} \left(\delta^a_c g_{bd} - \delta^a_d g_{bc}\right) \tag{E.12}$$

$$R_{bd} = \frac{R}{2} g_{bd} \tag{E.13}$$

Die Form der Tensor-Komponenten vereinfacht sich in zwei Dimensionen in bestimmten Koordinatensystemen erheblich. Im Folgenden betrachten wir die Komponenten in der konformen Eichung $g_{ab} = e^{2\alpha}\delta_{ab}$ und werden in dieser Eichung auch die Gleichung (**E**.12) herleiten.

E.2.2 Konforme Eichung

Ist der Raum zweidimensional, so ist die Metrik immer konform flach, läßt sich also in einem bestimmten Koordinatensystem schreiben als

$$\begin{aligned} g_{ab}(\sigma) &= e^{2\alpha(\sigma)}\delta_{ab} && (\mathbf{E}.14)\\ g^{ab} &= e^{-2\alpha}\delta^{ab} && (\mathbf{E}.15)\\ \sqrt{g} &= e^{2\alpha} && (\mathbf{E}.16) \end{aligned}$$

Die obigen Formeln (**E**.6-**E**.9) vereinfachen sich dann zu

$$\begin{aligned} \Gamma^c_{ab} &= \frac{1}{2}g^{cd}\left(g_{ad,b} + g_{bd,a} - g_{ab,d}\right) = \delta^c_a\alpha_{,b} + \delta^c_b\alpha_{,a} - \underbrace{g_{ab}\alpha^{,c}}_{\delta_{ab}\alpha_{,c}} && (\mathbf{E}.17)\\ R^a_{\ bcd} &= \left(\delta^a_d\alpha_{,bc} + \delta_{bc}\alpha_{,ad}\right) + \left(\delta^a_c\alpha_{,b}\alpha_{,d} + \delta_{db}\alpha_{,a}\alpha_{,c} + \delta^a_d\delta_{bc}\alpha_{,e}\alpha_{,e}\right) - (c \leftrightarrow d) && (\mathbf{E}.18)\\ R_{bd} &= R^a_{\ bad} = 2\alpha_{,bd} + 2\left(\alpha_{,b}\alpha_{,d} + \delta_{db}\alpha_{,a}\alpha_{,a}\right) - \left(2\alpha_{,bd} + \delta_{bd}\alpha_{,aa}\right) - 2\left(\alpha_{,b}\alpha_{,d} + \delta_{bd}\alpha_{,e}\alpha_{,e}\right) = && (\mathbf{E}.19)\\ &= -\delta_{bd}\alpha_{,aa} = -g_{bd}\Box\alpha && (\mathbf{E}.20)\\ R &= g^{bd}R_{bd} = -2\Box\alpha && (\mathbf{E}.21) \end{aligned}$$

Die in Abschnitt E.3.3 hergeleitete Variation des Ricci-Skalars unter Weyl-Transformationen kann man hiermit leicht bestätigen

$$\delta_\alpha R = -2\delta_\alpha e^{-2\alpha}\delta^{bd}\alpha_{,bd} = -2\delta\alpha\cdot R - 2e^{-2\alpha}\delta^{bd}\delta\alpha_{,bd} = -2\delta\alpha\cdot R - 2\Box\delta\alpha \qquad (\mathbf{E}.22)$$

(**E**.18) läßt sich noch erheblich vereinfachen. Betrachte dazu die nichtverschwindende Komponenten von $R^a_{\ bcd}$ im einzelnen:

$$R^1_{\ 212} = -R^1_{\ 221} = -R^{\ 1}_{2\ 12} = R^{\ 1}_{2\ 21} = -\left(\alpha_{,22} + \alpha_{,11}\right) = -e^{2\alpha}\Box\alpha = \frac{1}{2}e^{2\alpha}R = \frac{1}{2}g_{22}R \qquad (\mathbf{E}.23)$$

Daraus folgt (**E**.12). Fassen wir die Ergebnisse für die Krümmungstensoren noch einmal zusammen

$$\boxed{\begin{aligned} R^a_{\ bcd} &= \frac{R}{2}\left(\delta^a_c g_{bd} - \delta^a_d g_{bc}\right) = -\alpha_{,aa}\left(\delta^a_c\delta_{bd} - \delta^a_d\delta_{bc}\right) && (\mathbf{E}.24)\\ R_{bd} &= \frac{R}{2}g_{bd} = -\delta_{bd}\alpha_{,aa} && (\mathbf{E}.25)\\ R &= -2\Box\alpha && (\mathbf{E}.26) \end{aligned}}$$

Die Form des Riemannschen Krümmungstensors in (**E**.24) stimmt mit der eines Raumes mit konstanter Krümmung in beliebigen Dimensionen überein. Jedoch muß im Gegensatz dazu R hier nicht konstant sein.

Schließlich listen wir noch die Komponenten der Christoffel-Symbole im Einzelnen auf:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \alpha_{,1} && (\mathbf{E}.27)\\ \Gamma^1_{12} &= \alpha_{,2} = \Gamma^1_{21} && (\mathbf{E}.28)\\ \Gamma^1_{22} &= -\alpha_{,1} && (\mathbf{E}.29)\\ \Gamma^2_{11} &= -\alpha_{,2} && (\mathbf{E}.30)\\ \Gamma^2_{12} &= \alpha_{,1} = \Gamma^2_{21} && (\mathbf{E}.31)\\ \Gamma^2_{22} &= \alpha_{,2} && (\mathbf{E}.32) \end{aligned}$$

E.2.3 Komplexe Koordinaten (ausgehend von konformer Eichung)

(siehe z.B. [GSWa, S.125/126],[Pol, S.33])
Die konforme Eichung ist wie schon erwähnt

$$\tilde{g}_{ab} = e^{2\alpha(\sigma)}\delta_{ab} \tag{E.33}$$

Davon ausgehend definieren wir die komplexen Koordinaten

$$z^1 \equiv z \equiv \sigma^1 + i\sigma^2 \tag{E.34}$$
$$z^2 \equiv \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2 \tag{E.35}$$

bzw.

$$\sigma^1 = \frac{z+\bar{z}}{2} \tag{E.36}$$
$$\sigma^2 = \frac{z-\bar{z}}{2i} \tag{E.37}$$

Die Jacobimatrix ist damit

$$\frac{\partial(\sigma^1,\sigma^2)}{\partial(z,\bar{z})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \equiv J \tag{E.38}$$

so daß

$$g_{ab} = \frac{\partial\sigma^c}{\partial z^a}\frac{\partial\sigma^d}{\partial z^b}\tilde{g}_{cd} = \left(J^T\tilde{g}J\right)_{ab} = \frac{e^{2\alpha}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ab} \tag{E.39}$$
$$g^{ab} = 2e^{-2\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{ab} \tag{E.40}$$

Für die Christoffel-Symbole gilt wieder

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}\left(g_{ad,b} + g_{bd,a} - g_{ab,d}\right) = \delta^c_a\alpha_{,b} + \delta^c_b\alpha_{,a} - g_{ab}\alpha^{,c} \tag{E.41}$$

Die einzigen nicht verschwindenden Komponenten des Christoffel-Symbols sind

$$\Gamma^z_{zz} = 2\partial_z\alpha \tag{E.42}$$
$$\Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} = 2\partial_{\bar{z}}\alpha \tag{E.43}$$

Den Ricci-Skalar können wir aus Abschnitt (E.2.2) übernehmen

$$R = -2\Box\alpha = -8e^{-2\alpha}\partial_{\bar{z}}\partial_z\alpha \tag{E.44}$$

Mit der Formel (**E**.12) für den Riemann-Tensor

$$R^a_{bcd} = \frac{R}{2}\left(\delta^a_c g_{bd} - g_{bc}\delta^a_d\right) \tag{E.45}$$

erhalten wir für die nichtverschwindenden Komponenten des Riemann-Tensors

$$R^z_{zz\bar{z}} = -R^z_{z\bar{z}z} = -2\partial_{\bar{z}}\partial_z\alpha = \frac{R}{4}e^{2\alpha} = \frac{R}{2}g_{z\bar{z}} \tag{E.46}$$
$$R^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}z} = -R^{\bar{z}}_{\bar{z}z\bar{z}} = -2\partial_z\partial_{\bar{z}}\alpha = \frac{R}{4}e^{2\alpha} = \frac{R}{2}g_{z\bar{z}} \tag{E.47}$$

E.2.4 Lichtkegel-Koordinaten (ausgehend von konformer Eichung)

(siehe z.B. [GSWa, S.122]) Rechnet man Minkowskisch, so verwendet man statt der komplexen Koordinaten die Lichtkegelkoordinaten. Im Minkowskischen Fall ist die konforme Eichung

$$\tilde{h}_{ab} = e^{2\alpha(\sigma)}\eta_{ab} \tag{E.48}$$

Die Lichtkegel-Koordinaten sind definiert als

$$\sigma^+ \equiv \sigma^0 + \sigma^1 \tag{E.49}$$
$$\sigma^- \equiv \sigma^0 - \sigma^1 \tag{E.50}$$

Die Umkehrung ist

$$\sigma^0 = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} \tag{E.51}$$
$$\sigma^1 = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} \tag{E.52}$$

Die Jacobimatrix ist damit

$$\frac{\partial(\sigma^0,\sigma^1)}{\partial(\sigma^+,\sigma^-)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \equiv J \tag{E.53}$$

so daß

$$h_{ab} = \frac{\partial\sigma^{old\,c}}{\partial\sigma^a}\frac{\partial\sigma^{old\,d}}{\partial\sigma^b}\tilde{h}_{cd} = \left(J^T\tilde{h}J\right)_{ab} = -\frac{e^{2\alpha}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ab} \quad a,b \in \{+,-\} \tag{E.54}$$
$$h^{ab} = -2e^{-2\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{ab} \tag{E.55}$$

Die einzigen nicht verschwindenden Christoffel-Symbole sind

$$\Gamma^+_{++} = 2\alpha_{,+} \tag{E.56}$$
$$\Gamma^-_{--} = 2\alpha_{,-} \tag{E.57}$$

Der Ricci-Skalar ist

$$R = -2\Box\alpha = 8e^{-2\alpha}\alpha_{,+-} \tag{E.58}$$

Und die nichtverschwindenden Komponenten des Riemann-Tensors sind

$$R^+_{++-} = -R^+_{+-+} = -2\alpha_{,+-} \tag{E.59}$$
$$R^-_{--+} = -R^-_{-+-} = -2\alpha_{,-+} \tag{E.60}$$

E.3 Variation verschiedener Größen

E.3.1 Variation einer Determinanten (und des Logarithmus')

Sei A eine allgemeine d-dimensionale quadratische Matrix. Betrachtet wird die Variation nach A_{ab}

$$\det A = \exp \operatorname{tr} \ln A \tag{E.61}$$
$$\Rightarrow \delta \det A = \det A \cdot \operatorname{tr} \delta \ln A = \det A \cdot (\delta \ln A)_{aa} \tag{E.62}$$

Um die Variation von $\delta \ln A$ unter der Spur zu bestimmen, betrachte

$$(\delta \exp \ln A)_{aa} = \begin{cases} \delta A_{aa} \\ A_{ab}\,(\delta \ln A)_{ba} \end{cases} \tag{E.63}$$
$$\Rightarrow (\delta \ln A)_{ba} = {A^{-1}}_{bc}\delta A_{ca} \tag{E.64}$$
$$(\delta \ln A)_{aa} = {A^{-1}}_{ac}\delta A_{ca} \tag{E.65}$$

somit gilt

$$\boxed{\delta \det A = \det A \cdot A^{-1}{}_{ac} \delta A_{ca}} \tag{E.66}$$

Im Speziellen bedeutet das fuer die Determinante g der Metrik g_{ab} (symmetrisch) mit Inverser g^{ab}

$$\delta g = g \cdot g^{ac} \delta g_{ca} = g \cdot g^{ac} \delta g_{ac} \tag{E.67}$$

$$\delta \sqrt{g} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \cdot g^{ac} \delta g_{ac} \tag{E.68}$$

$$\delta \sqrt{-h} = \frac{1}{2} \sqrt{-h} \cdot h^{ac} \delta h_{ac} \tag{E.69}$$

E.3.2 Variation der Inversen

$$0 = \delta (\delta_{ab}) = \delta \left(A_{ac} A^{-1}{}_{cb} \right) = \delta A_{ac} A^{-1}{}_{cb} + A_{ac} \delta A^{-1}{}_{cb} \tag{E.70}$$

$$\Rightarrow A_{ac} \delta A^{-1}{}_{cb} = -\delta A_{ac} A^{-1}{}_{cb} \Big| A^{-1}{}_{da} \cdot (\ldots) \tag{E.71}$$

$$\delta A^{-1}{}_{db} = -A^{-1}{}_{da} \delta A_{ac} A^{-1}{}_{cb} \tag{E.72}$$

also

$$\boxed{\delta A^{-1}{}_{ab} = -A^{-1}{}_{ad} \delta A_{dc} A^{-1}{}_{cb}} \tag{E.73}$$

Betrachtet man wieder speziell die Metrik, so ergibt sich

$$\delta g^{ab} = -g^{ad} \delta g_{dc} g^{cb} \tag{E.74}$$

E.3.3 Variation der Krümmungstensoren unter Weyl-Transformation

Die Variation des Krümmungstensors (**E**.7) ist

$$\delta R^a_{bcd} = \delta \Gamma^a_{bd,c} + \delta \Gamma^a_{ce} \cdot \Gamma^e_{bd} + \Gamma^a_{ce} \delta \Gamma^e_{bd} - \delta \Gamma^a_{bc,d} - \delta \Gamma^a_{de} \cdot \Gamma^e_{bc} - \Gamma^a_{de} \delta \Gamma^e_{bc} \tag{E.75}$$

$$= \delta \Gamma^a_{bd,c} + \Gamma^a_{ce} \delta \Gamma^e_{bd} - \Gamma^e_{bc} \delta \Gamma^a_{de} \left(-\Gamma^e_{cd} \delta \Gamma^a_{be} + \Gamma^e_{cd} \delta \Gamma^a_{be} \right) - \delta \Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^e_{bd} \delta \Gamma^a_{ce} - \Gamma^a_{de} \delta \Gamma^e_{bc} \tag{E.76}$$

Da die Variationen $\delta\Gamma$ der Christoffelsymbole im Gegensatz zu den Christoffelsymbolen selbst Tensoren sind, kann man das mit der kovarianten Ableitung schreiben

$$\delta R^a_{bcd} = \nabla_c \delta \Gamma^a_{db} - \nabla_d \delta \Gamma^a_{cb} \tag{E.77}$$

$$\Rightarrow \delta R_{bd} = \nabla_a \delta \Gamma^a_{db} - \nabla_d \delta \Gamma^a_{ab} \tag{E.78}$$

Sei ν_{ab} die Variation der Metrik und betrachte speziell die einer infinitesimalen Weyl-Transformation

$$\nu_{ab} \equiv \delta g_{ab} = 2\omega g_{ab} \tag{E.79}$$

$$\Rightarrow \nu^{ab} = -\delta g^{ab} = 2\omega g^{ab} \tag{E.80}$$

Solange ν im folgenden explizit in den Gleichungen vorkommt, sind diese für allgemeine Variationen gültig. Erst wenn wir ν durch ω ausdrücken, beziehen wir uns speziell auf die Weyl-Transformation. Die Variation der Christoffel-Symbole ist

$$\delta \Gamma^a_{db} = \frac{1}{2} \delta \left(g^{ac} \left(g_{dc,b} + g_{cb,d} - g_{db,c} \right) \right) = \tag{E.81}$$

$$= -\frac{1}{2} \nu^{ac} \left(g_{dc,b} + g_{cb,d} - g_{db,c} \right) + \frac{1}{2} g^{ac} \left(\nu_{dc,b} + \nu_{cb,d} - \nu_{db,c} \right) \tag{E.82}$$

Die Ableitungen der Metrik kann man wieder so zu Christoffel-Symbolen kombinieren, daß gilt

$$\delta \Gamma^a_{db} = \frac{1}{2} \left(\nabla_b \nu^a_d + \nabla_d \nu^a_b - \nabla^a \nu_{db} \right) = \delta^a_d \omega_{,b} + \delta^a_b \omega_{,d} - g_{db} \omega^{,a} \tag{E.83}$$

$$\delta \Gamma^a_{ab} = \frac{1}{2} \left(\nabla_b \nu^a_a + \nabla_a \nu^a_b - \nabla^a \nu_{ab} \right) = \frac{1}{2} \nabla_b \nu^a_a = d \cdot \omega_{,b} \tag{E.84}$$

(mit d Dimension der Mannigfaltigkeit) Die Variation des Ricci-Tensors wird so zu

$$\delta R_{bd} = \frac{1}{2}\left(\nabla_a \nabla_b \nu^a_d + \nabla_a \nabla_d \nu^a_b - \nabla_a \nabla^a \nu_{db} - \nabla_d \nabla_b \nu^a_a\right) = \quad (\mathbf{E}.85)$$

$$= (2-d)\nabla_b \nabla_d \omega - g_{db}\Box\omega \quad (\mathbf{E}.86)$$

Die Variation des Ricci-Skalars schließlich ist

$$\delta R = \delta g^{bd} \cdot R_{bd} + g^{bd}\delta R_{bd} = \quad (\mathbf{E}.87)$$

$$= -\nu^{bd} R_{bd} + g^{bd}\frac{1}{2}\left(\nabla_a \nabla_b \nu^a_d + \nabla_a \nabla_d \nu^a_b - \nabla_a \nabla^a \nu_{db} - \nabla_d \nabla_b \nu^a_a\right) = \quad (\mathbf{E}.88)$$

$$= -\nu^{bd} R_{bd} + \nabla_a \nabla_b \nu^{ab} - \Box \nu^a_a = \quad (\mathbf{E}.89)$$

$$= -2\omega R + 2(1-d)\Box\omega \quad (\mathbf{E}.90)$$

Speziell für $d = 2$ gilt also

$$\boxed{\left.\begin{array}{c}\text{Dimension } d = 2\\ \delta g_{ab} = 2\omega g_{ab}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \delta R = -2\omega R - 2\Box\omega} \quad (\mathbf{E}.91)$$

Literaturverzeichnis

[Abb81] L. F. Abbott. The background field method beyond one loop. *Nucl. Phys.*, B185:189, 1981.

[AGMV86] Luis Alvarez-Gaume, Gregory W. Moore, and Cumrun Vafa. Theta functions, modular invariance, and strings. *Commun. Math. Phys.*, 106:1–40, 1986.

[AGS83] L. F. Abbott, Marcus T. Grisaru, and R. K. Schaefer. The background field method and the s matrix. *Nucl. Phys.*, B229:372, 1983.

[Alv83] Orlando Alvarez. Theory of strings with boundaries: Fluctuations, topology, and quantum geometry. *Nucl. Phys.*, B216:125, 1983.

[BCVZ96] Andrei A. Bytsenko, Guido Cognola, Luciano Vanzo, and Sergio Zerbini. Quantum fields and extended objects in space-times with constant curvature spatial section. *Phys. Rept.*, 266:1–126, 1996.

[BI34] M. Born and L. Infeld. Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A144:425, 1934.

[BVW91] Steven K. Blau, Matt Visser, and Andreas Wipf. Analytical results for the effective action. *Int. J. Mod. Phys.*, A6:5409–5433, 1991.

[CKP86] Curtis G. Callan, Igor R. Klebanov, and M. J. Perry. String theory effective actions. *Nucl. Phys.*, B278:78, 1986.

[CMPF85] Curtis G. Callan, E. J. Martinec, M. J. Perry, and D. Friedan. Strings in background fields. *Nucl. Phys.*, B262:593, 1985.

[CT] Curtis G. Callan and L. Thorlacius. Sigma models and string theory. Print-89-0232 (Princeton) *In *Providence 1988, TASI Proceedings, Particles, strings and supernovae, vol. 2* 795-878.* .

[FPQ01] Ruggero Ferrari, Marco Picariello, and Andrea Quadri. Algebraic aspects of the background field method. *Annals Phys.*, 294:165–181, 2001.

[FT85a] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin. Effective field theory from quantized strings. *Phys. Lett.*, B158:316, 1985.

[FT85b] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin. Nonlinear electrodynamics from quantized strings. *Phys. Lett.*, B163:123, 1985.

[FT85c] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin. Quantum string theory effective action. *Nucl. Phys.*, B261:1–27, 1985.

[GR] W. Greiner and J. Reinhardt. *Feldquantisierung.* Thun und Frankfurt am Main, Germany: Verlag Harri Deutsch (1993) 506 p. (Theoretische Physik, 7a).

[GSWa] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. Superstring theory. vol. 1: Introduction. Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[GSWb] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. Superstring theory. vol. 2: Loop amplitudes, anomalies and phenomenology. Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[Haw77] S. W. Hawking. Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 55:133, 1977.

[IZ] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory.* New York, USA: McGraw-Hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics).

[Kug] T. Kugo. *Eichtheorie.* Berlin/Heidelberg, Germany: Springer (1997) 522 P.

[Nak] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics.* Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).

[Pok] S. Pokorski. *Gauge Field Theories, 2nd Edition.* Cambridge, Uk: Univ. Pr. (2000) 609 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[Pol] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string.* Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p.

[Pol81] Alexander M. Polyakov. Quantum geometry of bosonic strings. *Phys. Lett.*, B103:207–210, 1981.

[PS] Michael E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory.* Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.

[Sac94] Ivo Michael Sachs. On symmetries, their breaking, and thermodynamics in field theory. 1994. ETH-10728, Ph.D. Thesis, ETH-Zürich.

[Sac97] Ivo Michael Sachs. Lectures on supersymmetry. 1997. DIAS-STP/97-27, Postgraduate Lectures given at Trinity College Dublin and University of Durham, UK.

[Scha] F. Schwabl. *Quantenmechanik.* 5. Auflage, Berlin, Heidelberg, NewYork, Springer (1998),419 p.

[Schb] John H. Schwarz. Comments on born-infeld theory. Talk given at the *Supergravity-at-25*-Conference at Stony Brook, December 1-2 2001.

[Schc] John H. Schwarz. Comments on born-infeld theory or (more precisely) world-volume theories of d-branes. Talk given at the international conference *Strings 2001* at the Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India, from January 5-10 2001.

[Sch51] Julian S. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 82:664–679, 1951.

[Spi] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol.II.* Third Edition, Houston, Texas: Publish or Perish (1999), 361 p.

[Tse89] A. A. Tseytlin. Sigma model approach to string theory. *Int. J. Mod. Phys.*, A4:1257, 1989.

[Weia] S. Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications.* Cambridge, UK: Univ. Pr. (1996) 489 p.

[Weib] Steven Weinberg. Covariant path integral approach to string theory. Lectures given at 3rd Jerusalem Winter School of Theoretical Physics, Jerusalem, Israel, Dec 30, 1986 - Jan 8, 1987.

[WW94] C. Wiesendanger and A. Wipf. Running coupling constants from finite size effects. *Ann. Phys.*, 233:125–161, 1994.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Referenzen benutzt zu haben.

München, den 31. Oktober 2002

Sebastian Guttenberg