

A Geometria da Relatividade

José Natário

5 de Setembro de 2007

Conteúdo

1 Transformações de Lorentz	4
1.1 Relatividade do conceito de movimento	4
1.2 Referenciais. Referenciais iniciais	4
1.3 Transformações de Galileu	5
1.4 Fórmula de adição de velocidades	6
1.5 Transformações de Lorentz	7
1.6 Fórmula de adição de velocidades relativista	8
1.7 Dilatação do tempo	9
1.8 Dedução das fórmulas das transformações de Lorentz	9
1.9 Fórmulas importantes	10
1.10 Exercícios	10
1.11 Soluções	13
2 Geometria de Minkowski	18
2.1 Unidades	18
2.2 Diagramas de espaço-tempo	18
2.3 Intervalo entre acontecimentos	19
2.4 Paradoxo dos Gêmeos generalizado	21
2.5 Mais dimensões	24
2.6 Fórmulas importantes	24
2.7 Exercícios	24
2.8 Soluções	28
3 Geometria Não Euclidiana	35
3.1 Coordenadas curvilíneas	35
3.2 A esfera	35
3.3 Geodésicas	38
3.4 Curvatura	40
3.5 Outros mapas da esfera	41
3.6 Outras geometrias	42
3.7 Exercícios	43
3.8 Soluções	44
4 Gravidade	46
4.1 Lei da Gravitação Universal	46
4.2 Unidades	46
4.3 Velocidade de escape	46
4.4 Leis de Kepler	47
4.5 Órbitas circulares	48
4.6 Fórmulas importantes	49
4.7 Exercícios	50
4.8 Soluções	50

<i>A Geometria da Relatividade</i>	3
5 Relatividade Geral	53
5.1 Princípio da Equivalência	53
5.2 Desvio gravitacional para o vermelho	53
5.3 Espaço-tempo curvo	54
5.4 Fórmulas importantes	55
5.5 Exercícios	56
5.6 Soluções	57
6 A Solução de Schwarzschild	60
6.1 A solução de Schwarzschild	60
6.2 Observadores estacionários	60
6.3 Desvio para o vermelho	61
6.4 Curvatura do espaço	62
6.5 Órbitas	62
6.6 Raios de luz	64
6.7 Buracos Negros	65
6.8 Fórmulas importantes	69
6.9 Exercícios	70
6.10 Soluções	73
7 Cosmologia	81
7.1 Desvio para o vermelho	81
7.2 Lei de Hubble	81
7.3 Modelos FLRW	81
7.4 Lei de Hubble nos modelos FLRW	83
7.5 Desvio para o vermelho nos modelos FLRW	85
7.6 Equações de Friedmann	86
7.7 Fórmulas importantes	87
7.8 Exercícios	87
7.9 Soluções	90
8 Matemática e Física	100
8.1 Matemática para a Relatividade Geral	100
8.2 Física Moderna	101
9 Dados astronómicos	102

1 Transformações de Lorentz

1.1 Relatividade do conceito de movimento

O movimento é relativo. Pode pensar que está parado. E está: parado em relação à superfície da Terra. Mas a Terra gira. À nossa latitude, rodamos a cerca de 1300 quilómetros por hora (mais rápido que a velocidade do som). Além disso, a Terra move-se em torno do Sol, a cerca de 30 quilómetros por segundo, e o Sol em torno do centro da Galáxia, a cerca de 220 quilómetros por segundo. Portanto está a mover-se a 1300 quilómetros por hora em relação ao centro da Terra, a 30 quilómetros por segundo em relação ao Sol, e a 220 quilómetros por segundo em relação ao centro da Galáxia.



Figura 1: A Terra – parada ou em movimento?

1.2 Referenciais. Referenciais inerciais

Para estudar um movimento é necessário fixar primeiro aquilo a que se chama um **referencial**. Um referencial é simplesmente um sistema de eixos coordenados em relação ao qual se podem indicar as coordenadas de qualquer ponto do espaço. Muitas vezes está associado a um objecto sólido (a Terra, por exemplo), mas tal não é estritamente necessário.

Quando dissemos que nos estamos a mover a 1300 quilómetros por hora em relação ao centro da Terra, não fomos inteiramente rigorosos. O que na realidade quisemos dizer foi que nos estamos a mover com esta velocidade no referencial centrado no centro da Terra **mas que não roda**. Este referencial é (aproximadamente) aquilo a que se chama um **referencial inercial**. Um referencial inercial é simplesmente um referencial no qual vale a **lei da inércia**: qualquer partícula sobre a qual não actuam forças move-se com velocidade constante (em direcção e sentido). O referencial ligado à superfície da Terra não é inercial devido à rotação da Terra, que faz com que a lei da inércia não se verifique exactamente (isto revela-se em certas experiências, como a do pêndulo de Foucault¹). No entanto, este referencial pode ser considerado um referencial inercial na maior parte das situações do dia-a-dia. Na verdade, o referencial ligado ao centro da Terra (sem rodar) não é também exactamente inercial (apesar de ser uma melhor aproximação a um referencial inercial que o referencial ligado à superfície da Terra), devido ao movimento da Terra em torno do Sol. Por ordem de melhor aproximação, são aproximadamente inerciais os referenciais ligados à superfície da Terra, ao centro da Terra (sem rodar), ao Sol (sem rodar) e ao centro da Galáxia

¹Jean Foucault (1819–1868), físico francês.

(também sem rodar). Em termos práticos, “não rodar” significa “não rodar em relação às estrelas distantes”. A sugestão de que a matéria do Universo no seu conjunto determina de alguma forma os referenciais de inércia chama-se o **princípio de Mach**².

O grande debate do século XVI entre o geocentrismo e o heliocentrismo era na realidade uma questão acerca de referenciais. Ambas as partes tinham razão neste debate: é tão correcto dizer que a Terra gira em torno do Sol como dizer que o Sol gira em torno da Terra. No primeiro caso estamos a ver as coisas no referencial ligado ao Sol, enquanto que no segundo estamos a usar o referencial ligado à superfície da Terra. No entanto, o referencial ligado ao Sol é (mais aproximadamente) inercial, pelo que a descrição do movimento relativo da Terra e do Sol é bem mais simples neste referencial.

1.3 Transformações de Galileu

Se S é um referencial inercial, qualquer outro referencial S' com eixos paralelos aos de S e que se move em relação ao S com velocidade constante é também um referencial inercial. Suponhamos que S' se move em relação a S ao longo do eixo dos xx com velocidade constante v , e que os dois referenciais coincidem para $t = 0$. Se no instante t um dado ponto P tem coordenadas (x, y, z) em S , deve ser claro da Figura 2 que as coordenadas (x', y', z') do mesmo ponto em S' serão dadas por

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

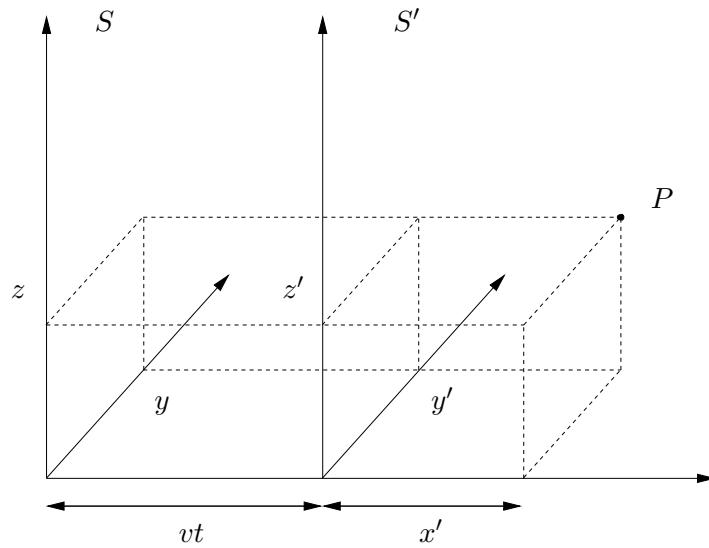


Figura 2: Transformação de Galileu.

A estas equações devemos juntar

$$t' = t$$

²Ernst Mach (1838–1916), físico e filósofo austríaco.

ou seja: o tempo medido no referencial S' coincide com o tempo medido no referencial S . Esta fórmula parece tão evidente que quase não valeria a pena escrevê-la (e de facto durante muito tempo ninguém a escreveu). Veremos em breve que na verdade está errada: por incrível que pareça, o tempo medido nos dois referenciais não coincide exactamente.

Diz-se que as fórmulas acima definem uma **transformação de Galileu**³ (que não é mais que uma mudança de referencial inercial). A transformação inversa é muito simples:

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Por outras palavras, basta mudar o sinal de v . Isto é o que seria de esperar, uma vez que S se move em relação a S' com velocidade $-v$.

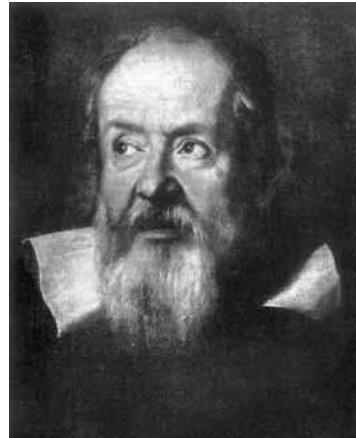


Figura 3: Galileu Galilei.

1.4 Fórmula de adição de velocidades

As transformações de Galileu têm como consequência a **fórmula de adição de velocidades**. Suponhamos que o ponto P está em movimento. Para simplificar, consideraremos apenas o caso em que P se move ao longo do eixo dos xx . Seja u a velocidade instantânea de P no referencial S . Quer isto dizer que se num intervalo de tempo muito pequeno $\Delta t = t_2 - t_1$, compreendido entre os instantes t_1 e t_2 (medidos em S), o ponto P se move de $\Delta x = x_2 - x_1$ entre os pontos de abcissas x_1 e x_2 (medidas em S), então

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u.$$

Em S' , o ponto P mover-se-á de $\Delta x'$ entre os pontos de abcissas x'_1 e x'_2 no intervalo de tempo $\Delta t'$ compreendido entre os instantes t'_1 e t'_2 . Os valores de t'_1, t'_2, x'_1, x'_2 estão relacionados com

³Galileu Galilei (1564 – 1642), astrónomo, físico e filósofo italiano.

os valores de t_1, t_2, x_1, x_2 pelas fórmulas da transformação de Galileu:

$$\begin{cases} t'_1 = t_1 \\ t'_2 = t_2 \\ x'_1 = x_1 - vt_1 \\ x'_2 = x_2 - vt_2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} \Delta t' = \Delta t \\ \Delta x' = \Delta x - v\Delta t \end{cases}$$

Logo, a velocidade instantânea de P em S' é

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - v = u - v.$$

Por outras palavras, a velocidade u de P em S é simplesmente a soma da velocidade u' de P em S' com a velocidade v de S' em relação a S .

1.5 Transformações de Lorentz

Foi com grande surpresa que Michelson⁴ e Morley⁵ descobriram, em 1887, que a velocidade da luz é a mesma em **todos** os referenciais inerciais. Isto viola flagrantemente a lei de adição de velocidades, de acordo com a qual qualquer objecto ou sinal está parado no referencial inercial que se desloca com a mesma velocidade.

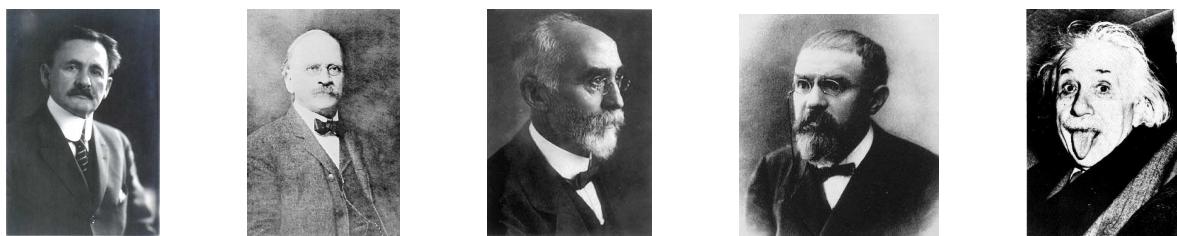


Figura 4: Michelson, Morley, Lorentz, Poincaré e Einstein.

Foi Einstein⁶ quem primeiro compreendeu que isto significava que as fórmulas das transformações de Galileu não podiam estar completamente correctas, e que teriam que ser substituídas pelas fórmulas das **transformações de Lorentz** (já anteriormente deduzidas por Lorentz⁷ e Poincaré⁸, que no entanto não lhes tinham dado a interpretação correcta):

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

⁴Albert Michelson (1852 – 1931), físico americano, prémio Nobel da Física (1907).

⁵Edward Morley (1838 – 1923), químico americano.

⁶Albert Einstein (1879 – 1955), físico alemão, prémio Nobel da Física (1921).

⁷Hendrik Lorentz (1853 – 1928), físico holandês, prémio Nobel da Física (1902)

⁸Henri Poincaré (1854 – 1912), matemático francês.

onde c representa a velocidade da luz (cerca de 300000 quilómetros por segundo) e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

A **Teoria da Relatividade Restrita**, descoberta por Einstein em 1905, resume-se a explorar as consequências destas transformações.

As velocidades com que habitualmente lidamos são muito inferiores à velocidade da luz, $|v| \ll c$. Portanto em situações usuais γ é praticamente igual a 1. Da mesma forma, $\frac{vx}{c^2}$ é praticamente zero. Portanto para a maior parte das aplicações do dia-a-dia as fórmulas das transformações de Lorentz reduzem-se às fórmulas das transformações de Galileu. É só quando as velocidades envolvidas se tornam comparáveis à velocidade da luz que aquelas se tornam importantes.

É fácil verificar que as transformações inversas se obtêm (como seria de esperar) substituindo v por $-v$:

$$\begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}$$

1.6 Fórmula de adição de velocidades relativista

Note-se que as fórmulas das transformações de Lorentz requerem que $|v| < c$: **dados dois referenciais iniciais, a velocidade de um deles em relação ao outro tem que ser inferior à velocidade da luz**. Portanto nunca é possível que um sinal luminoso esteja parado num dado referencial inercial. Mais geralmente, as transformações de Lorentz implicam que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais iniciais. Para verificar este facto, necessitamos da **fórmula de adição de velocidades relativista**. Mais uma vez supomos que o ponto P se move com velocidade instantânea u em S , deslocando-se de Δx (medido em S) num intervalo de tempo Δt (também medido em S). Então o deslocamento $\Delta x'$ medido em S' e o correspondente intervalo de tempo $\Delta t'$ medido no mesmo referencial são dados por

$$\begin{cases} \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2} \right) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \end{cases}$$

Consequentemente, a velocidade instantânea de P em S' é

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

No caso particular em que $u = c$ obtemos

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c \frac{c - v}{c - v} = c.$$

Por outro lado, se $u = -c$ vem

$$u' = \frac{-c - v}{1 + \frac{v}{c}} = -c \frac{c + v}{c + v} = -c.$$

Portanto, sempre que P se move à velocidade da luz em S , move-se à velocidade da luz em S' .

1.7 Dilatação do tempo

Uma das consequências mais contra-intuitivas das transformações de Lorentz é a observação de que o intervalo tempo medido entre dois acontecimentos depende do referencial em que é medido. Consideremos por exemplo que um observador em repouso no referencial S' ($\Delta x' = 0$) mede um intervalo de tempo $\Delta t'$. Então o correspondente intervalo de tempo medido no referencial S é

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2} \right) = \gamma\Delta t' > \Delta t'$$

(já que $\gamma > 1$ sempre que $v \neq 0$). Este fenómeno é conhecido como a **dilatação do tempo**.

1.8 Dedução das fórmulas das transformações de Lorentz

Apresentamos aqui uma dedução das fórmulas das transformações de Lorentz devida a Einstein. Einstein partiu dos dois seguintes postulados:

1. **Princípio da Relatividade:** Quaisquer dois referenciais inerciais são equivalentes.
2. **Princípio da Invariância da Velocidade da Luz:** A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.

Uma vez que as transformações de Galileu não são compatíveis com o segundo postulado, não podemos esperar que a fórmula “óbvia” $x' = x - vt$ funcione. Suponhamos no entanto que x' é **proporcional** a $x - vt$, isto é,

$$x' = \gamma(x - vt)$$

para alguma constante γ (a determinar). Uma vez que S se move em relação a S' com velocidade $-v$, o primeiro postulado obriga a que a que uma fórmula análoga funcione para a transformação inversa:

$$x = \gamma(x' + vt').$$

Resolvendo em ordem a t' obtemos

$$t' = \frac{x}{v\gamma} - \frac{x'}{v}.$$

Usando a fórmula acima para x' vem

$$t' = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) \frac{x}{v} + \gamma t.$$

Vamos agora usar o segundo postulado. Consideremos um sinal luminoso que se propaga ao longo do eixo dos xx (no sentido positivo) em S , passando por $x = 0$ no instante $t = 0$. A posição do sinal no instante t será então dada por $x = ct$. Por outro lado, de acordo com o segundo postulado, o sinal deve encontrar-se no ponto $x' = ct'$ em S' . Logo

$$c = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma(x - vt)}{\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)\frac{x}{v} + \gamma t} = \frac{\frac{x}{t} - v}{\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\frac{x}{vt} + 1} = \frac{c - v}{\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\frac{c}{v} + 1}$$

onde se conclui que

$$\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\frac{c}{v} + 1 = 1 - \frac{v}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Leftrightarrow \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Uma vez que devemos ter $\gamma = 1$ para $v = 0$, concluímos que devemos escolher o sinal positivo. Sendo

$$\frac{1}{\gamma} - \gamma = \gamma \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = -\gamma \frac{v^2}{c^2},$$

obtemos finalmente

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

1.9 Fórmulas importantes

- Transformações de Lorentz:

$$\boxed{\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}} \text{ com } \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

- Adição de velocidades:

$$\boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}} \text{ ou } \boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}$$

- Dilatação do tempo:

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

1.10 Exercícios

1. Mostre que à latitude de Lisboa (cerca de 39°) a velocidade de rotação da Terra é de aproximadamente 1300 quilómetros por hora. (Raio da Terra: cerca de 6400 quilómetros). Mostre que esta velocidade é superior à velocidade do som (cerca de 340 metros por segundo).
2. Mostre que a velocidade da Terra em relação ao Sol é de cerca de 30 quilómetros por segundo. (Distância da Terra ao Sol: cerca de 8,3 minutos-luz).
3. A metralhadora instalada na cauda de um bombardeiro que voa a 900 quilómetros por hora dispara balas também a 900 quilómetros por hora, na direcção oposta à do voo. O que acontece às balas?
4. Um rapaz atira uma bola de ténis a 50 quilómetros por hora na direcção de um combóio que se aproxima a 100 quilómetros por hora. Assumindo que a colisão é perfeitamente elástica, a que velocidade é devolvida a bola?
5. **Relatividade da simultaneidade:** A nave espacial *Enterprise* voa a 80% da velocidade da luz em relação à Terra. Exactamente a meio da nave existe uma lâmpada. Portanto, quando a lâmpada é acesa, a luz atinge a proa e a popa da nave exactamente ao mesmo tempo (para um observador a bordo). E para um observador na Terra?

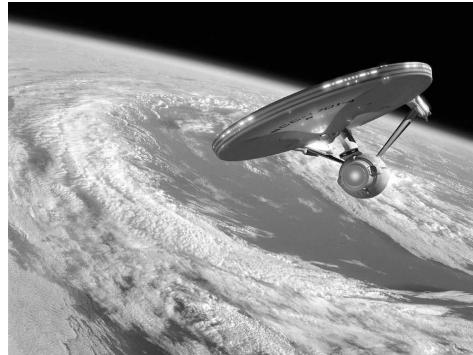


Figura 5: A *Enterprise* voa a 80% da velocidade da luz em relação à Terra.

6. Verifique que a fórmula para as transformações de Lorentz inversas está correcta.
7. **Contracção do espaço:** Considere uma régua de comprimento l em repouso no referencial S' . A régua encontra-se orientada ao longo do eixo dos $x'x'$, de modo que as extremidades da régua satisfazem $x' = 0$, $x' = l'$ para todo o t' . Escreva as equações que descrevem o movimento das extremidades da régua no referencial S , e mostre que neste referencial o comprimento da régua é

$$l = \frac{l'}{\gamma} < l'.$$
8. Verifique que a fórmula de adição de velocidades relativista pode ser escrita (como seria de esperar) na forma

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$
9. Um foguetão que voa na direcção da Terra a 50% da velocidade da luz dispara um míssil, cuja velocidade em relação ao foguetão é também de 50% da velocidade da luz. Qual a velocidade do míssil em relação à Terra quando este é disparado
 - (a) Para a frente?
 - (b) Para trás?
10. Dois foguetões voam a 50% da velocidade da luz em relação à Terra, mas em direcções opostas. Qual é a velocidade de um dos foguetões em relação ao outro?
11. A fórmula da dilatação do tempo pode ser directamente deduzida do facto da velocidade da luz ser a mesma em qualquer referencial de inércia usando um **relógio de luz** (Figura 6): consideremos, no referencial S' , um sinal luminoso que se propaga entre um *laser* L e um detector D ao longo do eixo dos $y'y'$. Se o sinal demora um intervalo de tempo $\Delta t'$ (medido em S') no trajecto, então a distância (medida em S') entre L e D é $\Delta y' = c\Delta t'$. Por outro lado, em S o detector D move-se ao longo do eixo dos xx com velocidade v . Portanto, no intervalo de tempo Δt (medido em S) entre a emissão e a detecção do *laser*, o detector desloca-se de $v\Delta t$ ao longo do eixo dos xx . Supondo que a distância Δy medida em S entre o *laser* e o detector é a mesma que em S' , $\Delta y = \Delta y'$, deduza a fórmula da dilatação do tempo.

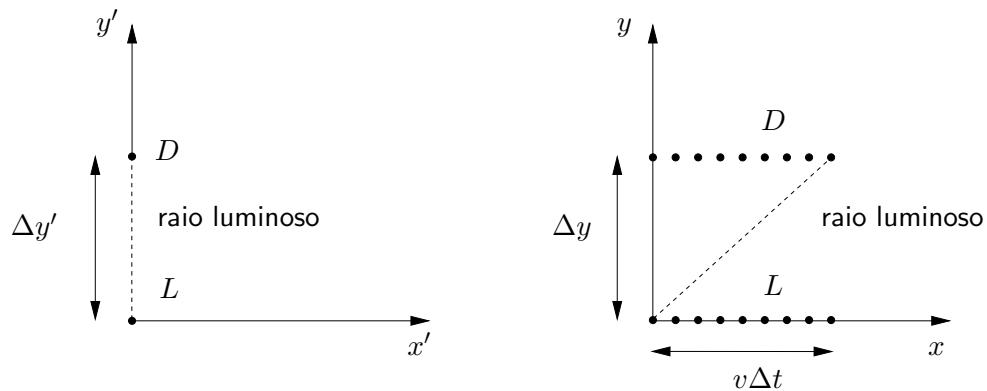


Figura 6: Relógio de luz.

12. **Aproximações úteis:** Mostre que se $|\varepsilon| \ll 1$ então:

$$(a) \frac{1}{1+\varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon;$$

$$(b) \sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

13. Em 1971, a fórmula da dilatação do tempo foi confirmada experimentalmente comparando dois relógios atómicos muito precisos. Um dos relógios foi mantido em repouso à superfície da Terra, enquanto que o outro foi transportado de avião ao longo do paralelo de latitude 39°, a uma velocidade média de 900 quilómetros por hora.

- (a) Qual foi a diferença nos valores indicados pelos dois relógios? Faz alguma diferença se o relógio está a voar para leste ou para oeste?
- (b) Mostre que mesmo que o relógio atómico fosse transportado muito lentamente ao longo do paralelo, de modo a minimizar os efeitos da dilatação do tempo, os dois relógios estariam sempre dessincronizados no final da viagem (**efeito de Sagnac**).

(Recorde que a Terra **não** é exactamente um referencial inercial, uma vez que está a rodar; poderá ser-lhe útil usar a aproximação $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq 1 - \frac{v^2}{2c^2}$, válida para velocidades v muito inferiores a c).

14. Quando os raios cósmicos atingem a atmosfera da Terra produzem (entre outras) partículas chamadas **muões**, tipicamente a uma altitude de 10 quilómetros. Estas partículas elementares são instáveis, desintegrando-se em cerca de $2,2 \times 10^{-6}$ segundos. No entanto, uma grande percentagem destes muões é detectada à superfície da Terra. Qual a velocidade mínima a que as partículas detectadas se estão a mover?
15. **Paradoxo dos Gémeos:** Dois gémeos, a Alice e o Bernardo, separam-se no seu 20º aniversário: enquanto a Alice fica na Terra (que constitui muito aproximadamente um referencial inercial), o Bernardo parte a 80% da velocidade da luz na direcção do Planeta X, situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança portanto 10 anos mais tarde (medidos no referencial da Terra). Após uma curta estadia, o Bernardo regressa à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz. Consequentemente, a Alice tem 40 anos quando revê o seu irmão.

- (a) Que idade tem o Bernardo nesse reencontro?
- (b) Como explica a assimetria nas idades dos gémeos? Afinal de contas, do ponto de vista do Bernardo, é ele quem está imóvel e é a Terra quem se afasta ou aproxima...

1.11 Soluções

1. O raio do paralelo que passa por Lisboa é de cerca de $6400 \times \cos(39^\circ) \simeq 5000$ quilómetros (veja a Figura 23), pelo que a sua circunferência mede aproximadamente $2\pi \times 5000 \simeq 31000$ quilómetros. Consequentemente, um ponto a esta latitude percorre 31000 quilómetros a cada 24 horas, correspondendo a uma velocidade de cerca de 1300 quilómetros por hora. Esta velocidade é superior à velocidade do som, que é de aproximadamente $0,34 \times 3600 \simeq 1200$ quilómetros por hora.
2. Um minuto-luz é a distância percorrida pela luz (à velocidade de 300000 quilómetros por segundo) no decorrer de um minuto. A circunferência da órbita da Terra mede portanto $2\pi \times 8,3 \times 60 \times 300000$ quilómetros, e a Terra percorre esta distância no decorrer de um ano, ou seja, $365 \times 24 \times 3600$ segundos. Dividindo obtemos o resultado.
3. Pela fórmula de adição de velocidades (de Galileu, uma vez que as velocidades são muito inferiores à da luz), a velocidade das balas subtrai-se à velocidade do avião, pelo que a velocidade das balas em relação à Terra é zero. Consequentemente, as balas caem a pique.
4. Relativamente ao combóio, a bola viaja a $50 + 100 = 150$ quilómetros por hora, pelo que é devolvida com a mesma velocidade. Portanto, do ponto de vista do rapaz a bola é devolvida a $150 + 100 = 250$ quilómetros por hora. Este truque é muitas vezes utilizado pelas sondas espaciais, numa manobra a que se costuma chamar **assistência gravitacional**. Nesta manobra, a sonda faz o papel de bola de ténis e um planeta o papel de combóio. Claro que a sonda não colide elasticamente com o planeta: em vez disso, descreve uma órbita rasante, que, por conservação de energia, se comporta como uma colisão elástica. Isto permite à sonda aumentar consideravelmente a sua velocidade.
5. Do ponto de vista de um observador na Terra, a luz atinge primeiro a popa da nave, que se aproxima do ponto de emissão do sinal luminoso (ao passo que a proa se afasta deste ponto). Quantitativamente, seja $2L$ o comprimento da *Enterprise*, e suponhamos que o sinal luminoso é emitido do ponto $x' = 0$ no instante $t' = 0$. Então o sinal luminoso alcança a popa (ponto $x' = -L$) e a proa (ponto $x' = L$) no instante $t' = \frac{L}{c}$. Uma vez que $\frac{v}{c} = 0,8$, e portanto $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,6$, as transformações de Lorentz dizem-nos que, no referencial da Terra, a luz alcança a popa no instante

$$t = \frac{t' + 0,8 \frac{x'}{c}}{0,6} = \frac{\frac{L}{c} - 0,8 \frac{L}{c}}{0,6} = \frac{L}{3c},$$

e a proa no instante

$$t = \frac{t' + 0,8 \frac{x'}{c}}{0,6} = \frac{\frac{L}{c} + 0,8 \frac{L}{c}}{0,6} = \frac{3L}{c}.$$

Do ponto de vista da Terra a luz demora então 9 vezes mais tempo a atingir a proa que a atingir a popa.

6. Basta verificar que

$$\gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \gamma^2 \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) + \gamma^2 \frac{v}{c^2} (x - vt) = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t = t$$

e

$$\gamma(x' + vt') = \gamma^2(x - vt) + v\gamma^2 \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x = x.$$

7. As extremidades da régua movem-se de acordo com as equações

$$x' = 0 \Leftrightarrow \gamma(x - vt) = 0 \Leftrightarrow x = vt$$

e

$$x' = l' \Leftrightarrow \gamma(x - vt) = l' \Leftrightarrow x = \frac{l'}{\gamma} + vt.$$

Consequentemente, o comprimento da régua no referencial S é

$$l = \frac{l'}{\gamma} + vt - vt = \frac{l'}{\gamma} = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(sempre menor que l').

8. Basta ver que

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \Leftrightarrow u - v = u' - \frac{u'uv}{c^2} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{u'v}{c^2} \right) u = u' + v \Leftrightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

9. Em ambos os casos a velocidade do foguetão em relação à Terra é $v = 0,5c$. Logo:

(a) Quando o míssil é disparado para a frente, a velocidade do míssil em relação ao foguetão é $u' = 0,5c$. Portanto a velocidade do míssil em relação à Terra será

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{0,5c + 0,5c}{1 + 0,5 \times 0,5} = \frac{c}{1,25} = 0,8c.$$

(b) Quando o míssil é disparado para trás, a velocidade do míssil em relação ao foguetão é $u' = -0,5c$. Portanto a velocidade do míssil em relação à Terra será

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{-0,5c + 0,5c}{1 - 0,5 \times 0,5} = 0.$$

10. O referencial do foguetão que se move da esquerda para a direita possui velocidade $v = 0,5c$. No referencial da Terra, o foguetão que se move da direita para a esquerda tem velocidade $u = -0,5c$. Em relação ao primeiro foguetão a sua velocidade será então

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{-0,5c - 0,5c}{1 + 0,5 \times 0,5} = -\frac{c}{1,25} = -0,8c.$$

11. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância percorrida pelo sinal luminoso no referencial S é

$$c^2 \Delta t^2 = v^2 \Delta t^2 + \Delta y^2 = v^2 \Delta t^2 + \Delta y'^2 = v^2 \Delta t^2 + c^2 \Delta t'^2.$$

Resolvendo em ordem a $\Delta t'$ obtemos

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

12. Se $|\varepsilon| \ll 1$ então $\varepsilon^2 \ll |\varepsilon|$ (por exemplo se $\varepsilon = 0,01$ então $\varepsilon^2 = 0,0001$). Portanto com erro da ordem de ε^2 (portanto desprezável) temos:

- (a) $(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 \simeq 1$, donde $\frac{1}{1+\varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon$;
- (b) $(1 + \frac{\varepsilon}{2})^2 = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \simeq 1 + \varepsilon$, donde $\sqrt{1 + \varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

Por exemplo,

- (a) $\frac{1}{1,01} = 0,99009900\dots \simeq 0,99 = 1 - 0,01$;
- (b) $\sqrt{1,01} = 1,00498756\dots \simeq 1,005 = 1 + \frac{0,01}{2}$.

13. Neste problema o facto do referencial à superfície da Terra não ser um referencial inercial (devido ao movimento de rotação da Terra) é relevante. Consequentemente, devemos usar o referencial inercial ligado ao centro da Terra. Como vimos na resolução do Exercício 1, o comprimento do paralelo de latitude 39° é $L = 31000$ quilómetros. Consequentemente a viagem de avião demorou aproximadamente $\frac{31000}{900} \simeq 31,4$ horas, ou seja, cerca de 124000 segundos.

- (a) O relógio parado na superfície da Terra move-se, como vimos no Exercício 1, a cerca de 1300 quilómetros por hora no referencial do centro da Terra. Portanto quando o avião voa para leste está a mover-se a $1300 + 900 = 2200$ quilómetros por hora neste referencial, e quando voa para oeste está a mover-se a $1300 - 900 = 400$ quilómetros por hora. Deste modo, a diferença entre os valores indicados pelos dois relógios quando o avião voou para oeste é

$$124000 \left(\sqrt{1 - \frac{1300^2}{(3600 \times 300000)^2}} - \sqrt{1 - \frac{2200^2}{(3600 \times 300000)^2}} \right) \text{ segundos.}$$

Usando a aproximação $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq 1 - \frac{v^2}{2c^2}$, obtemos para a diferença

$$124000 \times \frac{2200^2 - 1300^2}{2 \times (3600 \times 300000)^2} \simeq 170 \times 10^{-9} \text{ segundos.}$$

A diferença entre os valores indicados pelos dois relógios quando o avião voou para oeste é

$$124000 \left(\sqrt{1 - \frac{1300^2}{(3600 \times 300000)^2}} - \sqrt{1 - \frac{400^2}{(3600 \times 300000)^2}} \right) \text{ segundos,}$$

ou seja, aproximadamente

$$124000 \times \frac{400^2 - 1300^2}{2 \times (3600 \times 300000)^2} \simeq -80 \times 10^{-9} \text{ segundos.}$$

Portanto quando o relógio viajou para leste atrasou-se cerca de 170 nano-segundos em relação ao relógio parado na superfície da Terra, e quando voou para oeste adiantou-se cerca de 80 nano-segundos. Estas diferenças foram realmente medidas na experiência, juntamente com as correções introduzidas pelo efeito do campo gravitacional (ver Exercício 3 da Secção 5).

- (b) Seja $V \simeq 1300$ quilómetros por hora a velocidade de rotação da Terra à latitude 39° , e suponhamos que o relógio é transportado a uma velocidade muito pequena v ao longo do paralelo. Então a viagem demorará um tempo $\frac{L}{v}$. Se o relógio é transportado para leste, a dessincronização entre o relógio fixo e o relógio móvel será

$$\frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{(V+v)^2}{c^2}} \simeq \frac{L}{v} \frac{(V+v)^2 - V^2}{2c^2} = \frac{L}{v} \frac{(2V+v)v}{2c^2} \simeq \frac{VL}{c^2},$$

ou seja,

$$\frac{\frac{1300}{3600} \times 31000}{300000^2} \simeq 120 \times 10^{-9} \text{ segundos.}$$

Portanto o relógio móvel atrasar-se-á cerca de 120 nano-segundos em relação ao relógio fixo. Se o relógio for transportado para oeste, a dessincronização terá o mesmo valor absoluto mas sinal oposto, isto é, o relógio móvel adiantar-se-á cerca de 120 nano-segundos em relação ao relógio fixo.

O sistema GPS de navegação por satélite depende do funcionamento de estações em Terra que seguem o movimento dos satélites com grande exactidão. Estas estações possuem relógios atómicos muito precisos, que têm que estar sincronizados até aos nano-segundos. Para sincronizar os relógios é preciso levar em conta o efeito de Sagnac.

14. Se os muões se movem a uma velocidade de v quilómetros por segundo, demoram $\frac{10}{v}$ segundos a alcançar o solo no referencial da Terra. Para os muões, no entanto, o tempo decorrido é

$$\frac{10}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

devido à dilatação do tempo. Para os muões que alcançam o solo, este intervalo de tempo tem que ser inferior a $2,2 \times 10^{-6}$ segundos:

$$\begin{aligned} \frac{10}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 2,2 \times 10^{-6} &\Leftrightarrow \frac{100}{v^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) < 4,84 \times 10^{-12} \Leftrightarrow \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} < 4,84 \times 10^{-14} \\ &\Leftrightarrow \frac{c^2}{v^2} < 1 + 4,4 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{v}{c} > \frac{1}{\sqrt{1 + 4,4 \times 10^{-3}}} \simeq \frac{1}{1 + 2,2 \times 10^{-3}} \simeq 1 - 2,2 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Portanto os muões detectados no solo movem-se a pelo menos 99,998% da velocidade da luz.

15. (a) Uma vez que para a Alice se passaram 20 anos, e que neste intervalo de tempo o Bernardo se moveu a 80% da velocidade da luz, para o Bernardo passaram-se

$$20\sqrt{1 - 0,8^2} = 20\sqrt{0,36} = 20 \times 0,6 = 12 \text{ anos},$$

pelo que o Bernardo terá 32 anos no reencontro.

- (b) A assimetria nas idades dos gémeos deve-se ao facto de apenas a Alice permanecer num referencial inercial, já que o Bernardo tem que travar ao chegar ao Planeta X, e depois acelerar de novo para regressar à Terra. Apesar das velocidades serem conceitos relativos, o facto de se ser um observador inercial ou um observador acelerado é um conceito absoluto.

2 Geometria de Minkowski

2.1 Unidades

Uma vez que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores, podemos sem ambiguidade escolher unidades nas quais $c = 1$. Por exemplo, podemos medir o tempo em anos e as distâncias em anos-luz (um ano-luz é a distância percorrida pela luz no decurso de um ano, cerca de $9,5 \times 10^{12}$ quilómetros). Alternativamente, podemos medir as distâncias em metros e o tempo em metros-luz (um metro-luz é o tempo gasto pela luz para percorrer 1 metro, cerca de 3,3 nano-segundos).

2.2 Diagramas de espaço-tempo

Para formular geometricamente a Teoria da Relatividade Restrita, escolhemos um determinado referencial inercial S . Cada **acontecimento** pode ser especificado neste referencial indicando a posição x e o instante t em que ocorreu. Um **diagrama de espaço-tempo** consiste em representar os acontecimentos como pontos no plano com coordenadas Cartesianas (t, x) . Por razões históricas, costuma representar-se a coordenada t em ordenada.

O movimento de uma partícula pode ser representado num diagrama de espaço-tempo indicando a sua posição x em cada instante t ; obtemos deste modo uma linha, a que chamaremos a **história** da partícula. Consideramos de seguida alguns exemplos (ver Figura 7):

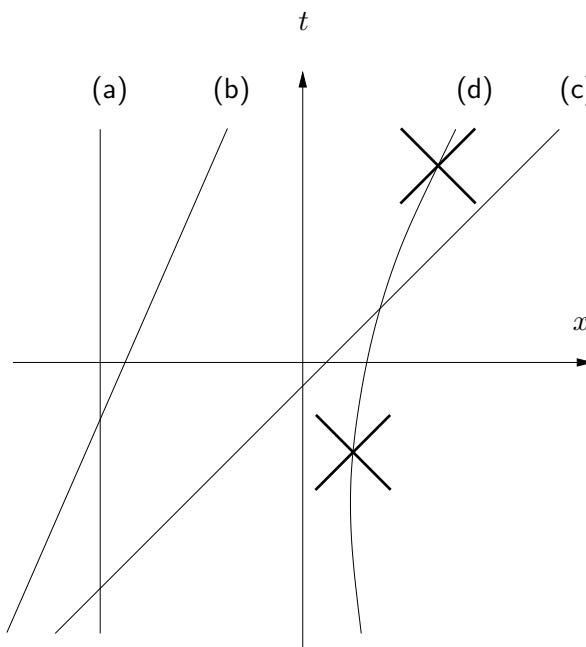


Figura 7: Diagrama de espaço-tempo contendo as histórias de: (a) Uma partícula em repouso; (b) Uma partícula com velocidade constante; (c) Um raio luminoso; (d) Uma partícula com velocidade variável.

- (a) Se a partícula se encontra em repouso no referencial S , então a sua posição x não varia com t : $x = x_0$, onde x_0 é uma constante. A história desta partícula é portanto uma recta vertical.

- (b) Se a partícula se move com velocidade constante v , então a sua posição no instante t é dada por $x = x_0 + vt$, onde x_0 é uma constante (representando a posição da partícula em $t = 0$). A história desta partícula é então uma linha recta de declive $\frac{1}{v}$ (já que a equação do movimento da partícula pode ser reescrita como $t = \frac{1}{v}(x - x_0)$).
- (c) Um sinal luminoso move-se com velocidade constante $\pm c = \pm 1$, e portanto a sua posição no instante t é $x = x_0 \pm t$, onde x_0 é uma constante (representando a posição do sinal em $t = 0$). A história do sinal é portanto uma linha recta de declive ± 1 .
- (d) Se a partícula se move com velocidade não constante, a sua história será uma linha curva. Como vimos, as fórmulas das transformações de Lorentz obrigam a que a velocidade de qualquer partícula seja inferior a $c = 1$. Portanto se em cada acontecimento da história da partícula imaginarmos dois sinais luminosos a serem emitidos (rectas de declives ± 1 passando nesse acontecimento), a história da partícula nunca poderá intersectar as histórias desses sinais luminosos em qualquer outro ponto.

2.3 Intervalo entre acontecimentos

Para representarmos acontecimentos num diagrama de espaço-tempo temos que escolher um referencial inercial S . É evidente que se escolhermos um referencial inercial diferente S' , a representação irá mudar, uma vez que as coodenadas (t', x') de um dado acontecimento em S' não coincidem (em geral) com as coodenadas (t, x) do mesmo acontecimento em S .

A situação é análoga ao que acontece quando introduzimos coodenadas Cartesianas no plano Euclidiano. Para o fazermos, temos que fixar um sistema de eixos ortogonais S . No entanto, a escolha dos eixos não é única: por exemplo, podemos escolher um sistema de eixos S' rodado de um ângulo α em relação a S (Figura 8). Se um dado ponto P tem coodenadas (x, y) em S , as suas coodenadas (x', y') em S' não são em geral iguais. Na verdade, é possível mostrar que se tem

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

As coodenadas do ponto P não têm portanto significado geométrico, uma vez que dependem da escolha do sistema de eixos. No entanto, a introdução de um sistema de eixos permite-nos calcular quantidades com significados geométrico, como por exemplo a distância entre dois pontos. Consideremos dois pontos, P_1 e P_2 , com coodenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em S . As coodenadas destes pontos em S' serão (x'_1, y'_1) e (x'_2, y'_2) , com

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha \\ x'_2 = x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha \\ y'_1 = -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \\ y'_2 = -x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha \end{cases}$$

Se $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ e $\Delta y' = y'_2 - y'_1$ representam as diferenças entre as coodenadas de P_2 e P_1 em cada um dos referenciais, temos

$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha \\ \Delta y' = -\Delta x \sin \alpha + \Delta y \cos \alpha \end{cases}$$

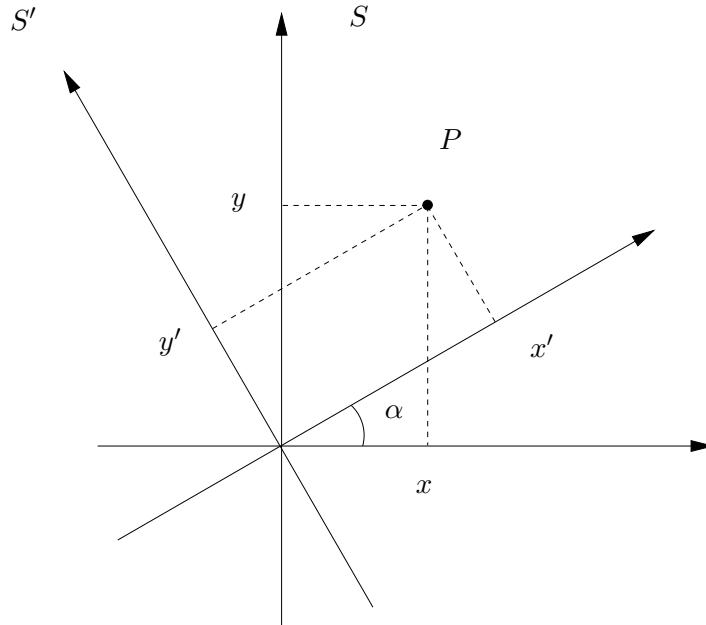


Figura 8: Dois sistemas de eixos.

A distância Δs entre P_1 e P_2 pode ser calculada em S a partir do Teorema de Pitágoras:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Em S' , esta distância é dada por

$$\Delta s'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$$

Como esta distância é uma propriedade geométrica, não pode depender do sistema de eixos.
De facto:

$$\begin{aligned} \Delta x'^2 + \Delta y'^2 &= (\Delta x \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha)^2 + (-\Delta x \sin \alpha + \Delta y \cos \alpha)^2 \\ &= \Delta x^2 \cos^2 \alpha + \Delta y^2 \sin^2 \alpha + 2\Delta x \Delta y \sin \alpha \cos \alpha + \Delta x^2 \sin^2 \alpha + \Delta y^2 \cos^2 \alpha - 2\Delta x \Delta y \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \Delta x^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \Delta y^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2. \end{aligned}$$

Por analogia, definimos a “distância” $\Delta\tau$ entre dois acontecimentos P_1 e P_2 de coordenadas (t_1, x_1) e (t_2, x_2) em S mediante

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2,$$

onde $\Delta t = t_2 - t_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$. Note-se que $\Delta\tau$ **não** é a distância Euclidiana entre os dois acontecimentos no diagrama de espaço-tempo, por causa do sinal negativo. Note-se também que só podemos definir distância entre acontecimentos tais que $|\Delta x| \leq |\Delta t|$. Pares de acontecimentos nestas condições dizem-se **causalmente relacionados**, uma vez que só neste caso um deles pode ser a causa do outro: a velocidade máxima de propagação de qualquer sinal é a da luz, e portanto $|\frac{\Delta x}{\Delta t}| \leq 1$ ao longo da história de qualquer sinal. À “distância” $\Delta\tau$ chama-se o **intervalo** entre os acontecimentos causalmente relacionados P_1 e P_2 .

Surpreendentemente, o intervalo não depende do referencial inercial em que é calculado:

$$\begin{aligned}\Delta t'^2 - \Delta x'^2 &= \gamma^2(\Delta t - v\Delta x)^2 - \gamma^2(\Delta x - v\Delta t)^2 \\ &= \gamma^2(\Delta t^2 + v^2\Delta x^2 - 2v\Delta t\Delta x - \Delta x^2 - v^2\Delta t^2 + 2v\Delta t\Delta x) \\ &= \gamma^2(1 - v^2)\Delta t^2 - \gamma^2(1 - v^2)\Delta x^2 \\ &= \Delta t^2 - \Delta x^2\end{aligned}$$

(onde usámos as fórmulas das transformações de Lorentz com $c = 1$.) Podemos portanto encarar a Relatividade Restrita como o estudo de uma geometria, diferente da habitual geometria Euclidiana, em que a distância entre dois pontos é substituída pelo intervalo entre dois acontecimentos. A esta nova geometria chama-se a **geometria de Minkowski**⁹.



Figura 9: Hermann Minkowski.

Qual é o significado físico do intervalo entre dois acontecimentos? Se $\Delta\tau \neq 0$, temos $|\Delta x| < |\Delta t|$. Portanto existe um observador com velocidade v constante que presencia os dois acontecimentos, já que

$$|v| = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| < 1.$$

No referencial S' deste observador, os acontecimentos ocorrerão no mesmo ponto do espaço, $\Delta x' = 0$. Portanto neste referencial

$$\Delta\tau = |\Delta t'|.$$

Concluímos que o **intervalo entre dois acontecimentos representa o tempo medido entre os acontecimentos por um observador inercial que presencia ambos os acontecimentos** (desde que seja diferente de zero). Se $\Delta\tau = 0$, temos $|\Delta x| = |\Delta t|$, e portanto **acontecimentos entre os quais o intervalo é zero são acontecimentos ao longo da história de um dado sinal luminoso**.

2.4 Paradoxo dos Gêmeos generalizado

O Paradoxo dos Gêmeos refere-se à situação ilustrada pelo seguinte exercício do capítulo anterior: Dois gémeos, a Alice e o Bernardo, separam-se no seu 20º aniversário: enquanto a Alice fica na

⁹Hermann Minkowski (1864 – 1909), matemático alemão

Terra (que constitui muito aproximadamente um referencial inercial), o Bernardo parte a 80% da velocidade da luz na direcção do Planeta X, situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança portanto 10 anos mais tarde (medidos no referencial da Terra). Após uma curta estadia, o Bernardo regressa à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz. Consequentemente, a Alice tem 40 anos quando revê o seu irmão. Que idade tem o Bernardo nesse reencontro?

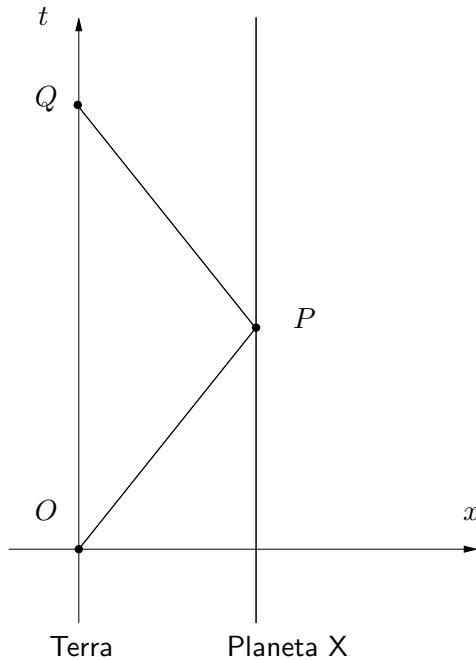


Figura 10: Diagrama de espaço-tempo para o Paradoxo dos Gêmeos.

Usando a fórmula da dilatação do tempo, pode mostrar-se que o Bernardo tem apenas 32 anos quando regressa à Terra. Vejamos como podemos chegar à mesma conclusão usando a geometria de Minkowski. Começamos por escolher um referencial inercial. A escolha mais simples é o referencial da Terra. Neste referencial, a Terra está em repouso, e a sua história é portanto uma recta vertical, por exemplo o eixo dos t ($x = 0$). O Planeta X também se encontra em repouso neste referencial, e a sua história será então a recta $x = 8$ (usando anos e anos-luz como unidades). Se escolhermos $t = 0$ para o instante da separação dos dois gémeos, esta separação será o acontecimento O com coordenadas $(0, 0)$. Uma vez que no referencial da Terra o Bernardo demora 10 anos a chegar ao Planeta X, o acontecimento P em que o Bernardo chega ao Planeta X tem coordenadas $(10, 8)$. Finalmente, o reencontro dos dois gémeos é claramente o acontecimento Q de coordenadas $(20, 0)$ (Figura 10).

O tempo medido pelo Bernardo para a viagem de ida é então o intervalo \overline{OP} entre os acontecimentos O e P , dado por

$$\overline{OP}^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36,$$

ou seja, $\overline{OP} = 6$. O tempo medido pelo Bernardo para a viagem de regresso é o intervalo \overline{PQ} entre os acontecimentos P e Q , dado por

$$\overline{PQ}^2 = (20 - 10)^2 - (0 - 8)^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36,$$

ou seja, $\overline{PQ} = 6$. Portanto, a viagem total demora $\overline{OP} + \overline{PQ} = 6 + 6 = 12$ anos para o Bernardo.

O facto do Bernardo ser mais novo no reencontro pode ser reformulado geometricamente como a afirmação de que

$$\overline{OQ} > \overline{OP} + \overline{PQ},$$

ou seja: o intervalo correspondente ao lado OQ do triângulo OPQ é **maior** que a soma dos intervalos correspondentes aos outros dois lados.

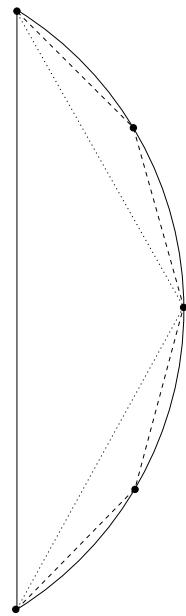


Figura 11: A curva de comprimento mínimo entre dois pontos do plano é o segmento de recta. O mesmo diagrama pode ser usado para mostrar que a curva causal de comprimento máximo entre dois acontecimentos é o segmento de recta.

Isto é exactamente o contrário do que se passa em geometria Euclidiana, onde o comprimento de um lado de um triângulo é sempre **menor** que a soma dos comprimentos dos outros dois lados (**desigualdade triangular**).

A desigualdade triangular pode ser usada para mostrar que a curva de comprimento mínimo entre dois pontos no plano Euclidiano é um segmento de recta. De facto, dada uma curva qualquer unindo dois pontos do plano, podemos aproxima-la por uma linha quebrada unindo pontos ao longo da curva (Figura 11). Aplicando sucessivamente a desigualdade triangular, é evidente que o comprimento da linha quebrada é maior que o comprimento do segmento de recta que une os dois pontos. Como podemos fazer o comprimento da linha quebrada ser tão próximo do comprimento da curva quanto quisermos (aumentando o número de pontos ao longo da curva), concluímos que o comprimento da curva é necessariamente maior que o comprimento do segmento de recta que une os dois pontos.

Podemos fazer um raciocínio análogo em geometria Minkowskiana, usando a desigualdade que resulta do paradoxo dos gémeos. Uma vez que só podemos calcular intervalos entre acontecimentos causalmente relacionados, só podemos calcular “comprimentos” de curvas tais que quaisquer dois pontos ao longo da curva estão causalmente relacionados. Curvas deste tipo chamam-se **curvas causais**. Como vimos, estas são exactamente as curvas que representam histórias de partículas.

O comprimento de uma curva causal deve então ser interpretado como o tempo medido pela partícula ao longo da sua história. A curva causal ser uma recta significa que a partícula cuja história ela representa não acelera em nenhum referencial inercial (**partícula livre**). Podemos então enunciar **paradoxo dos gémeos generalizado**: de todas as curvas causais que unem dois acontecimentos, a de comprimento **máximo** é o segmento de recta. Fisicamente, de todos os observadores que presenciam dois dados acontecimentos, aquele que envelhece **mais** entre os dois acontecimentos é o que não acelera nunca.

2.5 Mais dimensões

Para simplificar, considerámos até agora apenas diagramas de espaço-tempo com duas dimensões (coordenadas (t, x)). No entanto, um diagrama de espaço-tempo completo possui **quatro** dimensões, correspondentes às coordenadas (t, x, y, z) dos acontecimentos num dado referencial inercial. Neste caso, o intervalo entre acontecimentos causalmente relacionados será

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Infelizmente, não é fácil visualizar o espaço a 4 dimensões (apesar de do ponto de vista matemático não haver qualquer problema em trabalhar com espaços com qualquer número de dimensões – mesmo infinitas dimensões). Por esse motivo, consideraremos aqui apenas diagramas de espaço-tempo com no máximo 3 dimensões, correspondentes às coordenadas (t, x, y) nalgum referencial inercial. Isto permite-nos considerar partículas e sinais luminosos que se movem no plano (x, y) . O intervalo entre dois acontecimentos causalmente relacionados será dado por

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2.$$

Em relação aos diagramas bidimensionais, a principal diferença é que dado um determinado acontecimento (por exemplo a origem O), o conjunto de todos os acontecimentos cujo intervalo em relação a O é zero (ou seja, todos os acontecimentos ao longo de sinais luminosos que passam por O) formam agora um **cone**, dito o **cone de luz** de O (Figura 12). A condição para uma curva ser causal é agora a de que esteja dentro do cone de luz de cada um dos seus pontos.

2.6 Fórmulas importantes

- Intervalo entre acontecimentos:

$$\boxed{\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2}$$

- Efeito de Doppler (nos Exercícios):

$$\boxed{T' = T \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}} \text{ com } \boxed{T' = T(1+v) \text{ para } |v| \ll 1}$$

2.7 Exercícios

1. Verifique que um ano-luz são cerca de $9,5 \times 10^{12}$ quilómetros, e que um metro-luz são cerca de $3,3 \times 10^{-9}$ segundos.

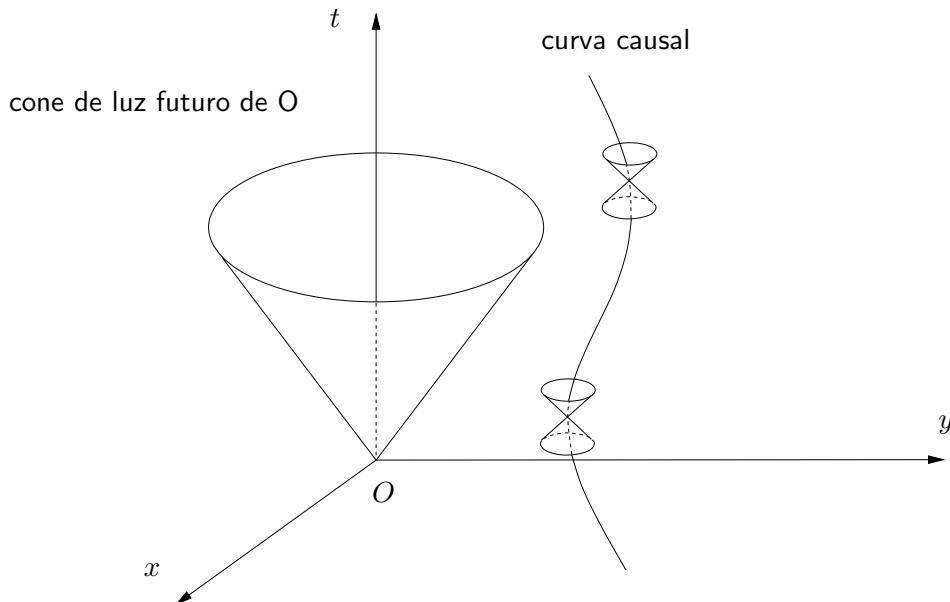


Figura 12: Diagrama de espaço-tempo.

2. **Problema de Lucas¹⁰:** Nos finais do século XIX existia um serviço de carreira regular entre Le Havre e Nova Iorque realizado por transatlânticos. Todos os dias ao meio-dia (GMT) partia um transatlântico de Le Havre e outro de Nova Iorque. A viagem demorava exactamente sete dias, pelo que as chegadas ocorriam também ao meio-dia (GMT). Assim, um transatlântico que partisse de Le Havre cruzava-se à partida com um que estava a chegar de Nova Iorque, e à chegada com um que partia para Le Havre nesse momento. Além destes dois, com quantos outros transatlânticos se cruzava o transatlântico oriundo de Le Havre durante a sua viagem? A que horas? Quantos transatlânticos ao todo eram necessários para assegurar o serviço?
3. Mostre que as coordenadas (x, y) e (x', y') do mesmo ponto P em dois sistemas de eixos S e S' com S' rodado de um ângulo α em relação a S satisfazem

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

4. **Paradoxo dos Gémeos (outra vez):** Recorde o enunciado do exercício que ilustra o Paradoxo dos Gémeos: Dois gémeos, Alice e Bernardo, separam-se no seu 20º aniversário: enquanto Alice fica na Terra (que constitui muito aproximadamente um referencial inercial), Bernardo parte a 80% da velocidade da luz na direcção de um planeta situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança portanto 10 anos mais tarde (medidos no referencial da Terra). Após uma curta estadia, Bernardo regressa à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz. Consequentemente, a Alice tem 40 anos quando revê o seu irmão. Como vimos, o Bernardo tem 32 anos no reencontro.

¹⁰François Lucas (1842 – 1891), matemático francês.

- (a) Represente estes acontecimentos no referencial inercial S' em que o Bernardo está parado durante a viagem de ida, e confirme as idades dos dois gémeos no reencontro.
- (b) A mesma coisa para o referencial inercial S'' em que o Bernardo está parado durante a viagem de regresso.
- (c) Imagine agora que cada um dos gémeos possui um telescópio ultrapotente, com o qual vai observando o outro ao longo da viagem. O que é que cada um deles vê? Em particular, quanto tempo passa para cada um deles quando vêem passar um ano para o seu gémeo?
5. **Efeito de Doppler**¹¹: Use o diagrama de espaço-tempo na Figura 13 para mostrar que se um sinal luminoso tem período T em S então o seu período medido em S' é

$$T' = T \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Mostre ainda que para velocidades muito inferiores à da luz, $|v| \ll 1$, esta fórmula se reduz a

$$T' = T(1+v).$$

Este efeito permite medir a velocidade com que uma fonte de luz (e.g. uma estrela) se aproxima ou afasta da Terra.

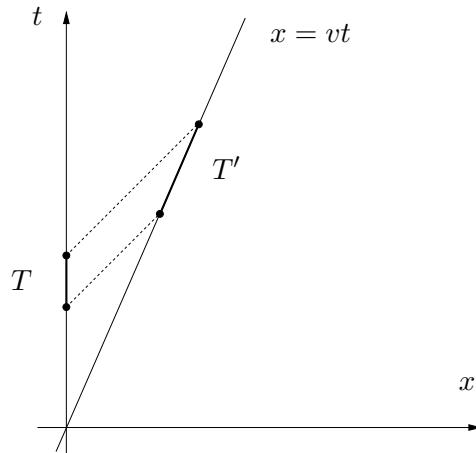


Figura 13: Efeito de Doppler.

6. Um espião Klingon consegue apropiar-se da mais recente nave espacial Terrestre, a *Einstein*, e fugir na direcção do seu planeta a 60% da velocidade da luz. Em desespero de causa, decide-se instalar um motor experimental na *Enterprise* que teoricamente lhe permitirá alcançar 80% da velocidade da luz. A instalação demora 1 ano, mas o novo motor funciona na perfeição. A *Enterprise* parte no encalço do espião e captura-o algum tempo depois no decorrer de uma emocionante batalha.

- a) Quanto tempo decorre entre o roubo da *Einstein* e a sua captura

¹¹Christian Doppler (1803 – 1853), matemático austríaco.

- (i) de acordo com um observador no referencial (inercial) da Terra?
(ii) de acordo com o espião Klingon?
(iii) de acordo com os tripulantes da *Enterprise*?
- b) Foi decidido que, caso a *Enterprise* fosse destruída, seria emitido da Terra um sinal de rádio que accionaria o mecanismo secreto de auto-destruição da *Einstein*. Quanto tempo após o roubo se poderá saber na Terra se o sinal deve ou não ser emitido?
- c) Supondo que a velocidade máxima da *Einstein* é 60% da velocidade da luz, quando é que na Terra se teria confirmação da sua auto-destruição, caso o sinal fosse emitido?



Figura 14: A *Enterprise* captura o espião.

7. O míssil mais rápido que a luz: Durante uma missão de vigilância no planeta dos pérfidos Klingons, a *Enterprise* descobre que estes se preparam para construir um míssil mais rápido que a luz para com ele atacarem o planeta dos benévolos Lmaquianos, situado a 12 anos-luz. Alarmado, o Capitão Kirk ordena que a *Enterprise* parta à velocidade máxima ($\frac{12}{13}$ da velocidade da luz) para o planeta ameaçado, ao mesmo tempo que um sinal de rádio é enviado a prevenir os Lmaquianos do ataque iminente. Infelizmente, estas medidas revelam-se infrutíferas: onze anos depois (no referencial de ambos os planetas) os Klingons completam a construção do míssil, que lançam de imediato a uma velocidade de 12 vezes a velocidade da luz. Portanto o aviso, deslocando-se à velocidade da luz, chega em simultâneo com o míssil, doze anos depois do seu envio, e a *Enterprise* alcança as ruínas do planeta um ano mais tarde.

- a) Quanto tempo demora a viagem da *Enterprise* do ponto de vista dos seus tripulantes?
b) No referencial dos planetas, usando anos e anos-luz como unidades de tempo e espaço, sejam $(0, 0)$ as coordenadas (t, x) do acontecimento em que a *Enterprise* descobre a trama, $(11, 0)$ as coordenadas do lançamento do míssil, $(12, 12)$ as coordenadas da destruição do planeta dos Lmaquianos e $(13, 12)$ as coordenadas da chegada da *Enterprise* às ruínas do planeta. Calcule as coordenadas (t', x') dos mesmos acontecimentos no referencial da *Enterprise*.
c) Desenhe um diagrama com as trajectórias da *Enterprise*, dos planetas, do aviso e do míssil no referencial $t'OX'$ da *Enterprise*. Descreva o desenrolar dos acontecimentos do ponto de vista dos observadores deste referencial.

2.8 Soluções

1. Um ano-luz são cerca de

$$365 \times 24 \times 3600 \times 300000 \simeq 9,5 \times 10^{12} \text{ quilómetros.}$$

Um metro-luz são cerca de

$$\frac{0,001}{300000} \simeq 3,3 \times 10^{-9} \text{ segundos,}$$

ou seja, cerca de 3,3 nano-segundos.

2. A resolução do problema torna-se trivial quando se traçam as histórias dos transatlânticos num diagrama de espaço-tempo (Figura 15). Assim, cada transatlântico cruzava-se com 13 outros transatlânticos no alto mar, a cada meio-dia e meia-noite da viagem. Assumindo que cada transatlântico precisava de um dia no porto de chegada para se reabastecer (e carregar) para a partida, o serviço podia ser assegurado por apenas 16 transatlânticos.

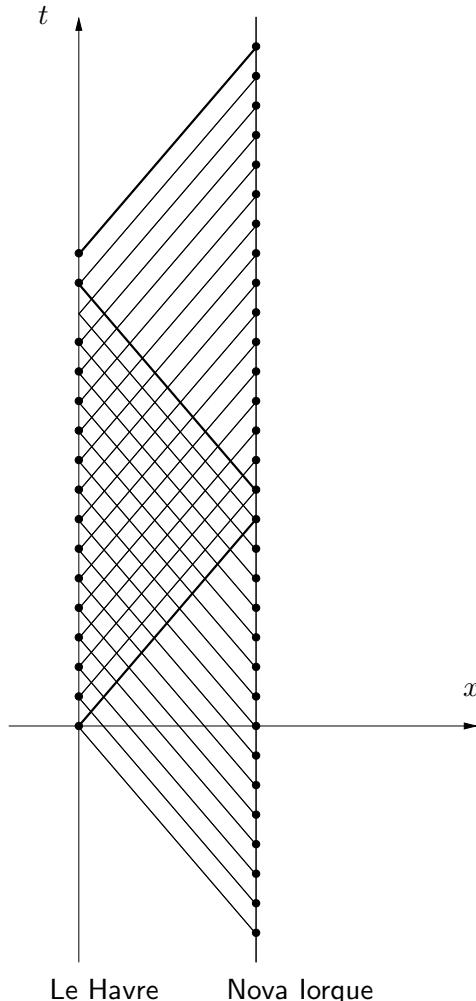


Figura 15: Diagrama de espaço-tempo para o Problema de Lucas.

3. Com argumentos de trigonometria elementar, é fácil ver a partir da Figura 8 que

$$x' = \frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y'}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$$

e que

$$y = \frac{y'}{\cos \alpha} + \frac{x}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow y' = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha.$$

Substituindo a segunda equação na primeira vem

$$x = x' \cos \alpha - y \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + x \operatorname{sen}^2 \alpha \Leftrightarrow x' \cos \alpha = x \cos^2 \alpha + y \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha,$$

donde

$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha.$$

4. No referencial S da Terra, sejam $(0, 0)$ as coordenadas do acontecimento O correspondente à partida do Bernardo. Então o acontecimento P em que o Bernardo chega ao Planeta X tem coordenadas $(10, 8)$, e o acontecimento Q em que o Bernardo chega à Terra tem coordenadas $(20, 0)$.

(a) O referencial S' em que o Bernardo está em repouso na viagem de ida move-se com velocidade $v = 0,8$ em relação a S . Consequentemente, $\sqrt{1 - v^2} = 0,6$, e portanto as coordenadas (t', x') de um acontecimento em S' relacionam-se com as coordenadas (t, x) de um acontecimento em S mediante as transformações de Lorentz

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{t - 0,8x}{0,6} \quad \text{e} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{x - 0,8t}{0,6}.$$

Logo, no referencial S' o acontecimento O tem coordenadas $(0, 0)$, o acontecimento P tem coordenadas $(6, 0)$ (como não podia deixar de ser), e o acontecimento Q tem coordenadas $(\frac{100}{3}, -\frac{80}{3})$. Estes acontecimentos encontram-se representados na Figura 16. Se calcularmos neste referencial o tempo medido pela Alice entre os acontecimentos O e Q obtemos

$$\sqrt{\left(\frac{100}{3}\right)^2 - \left(\frac{80}{3}\right)^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ anos.}$$

Do mesmo modo, o tempo medido pelo Bernardo entre os acontecimentos O e P é claramente de 6 anos, e o tempo medido pelo Bernardo entre os acontecimentos P e Q é dado por

$$\sqrt{\left(\frac{100}{3} - 6\right)^2 - \left(\frac{80}{3}\right)^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ anos.}$$

(b) O referencial S'' em que o Bernardo está em repouso na viagem de regresso move-se com velocidade $v = -0,8$ em relação a S . Consequentemente, $\sqrt{1 - v^2} = 0,6$, e portanto as coordenadas (t'', x'') de um acontecimento em S'' relacionam-se com as coordenadas (t, x) de um acontecimento em S mediante as transformações de Lorentz

$$t'' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{t + 0,8x}{0,6} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{x + 0,8t}{0,6}.$$

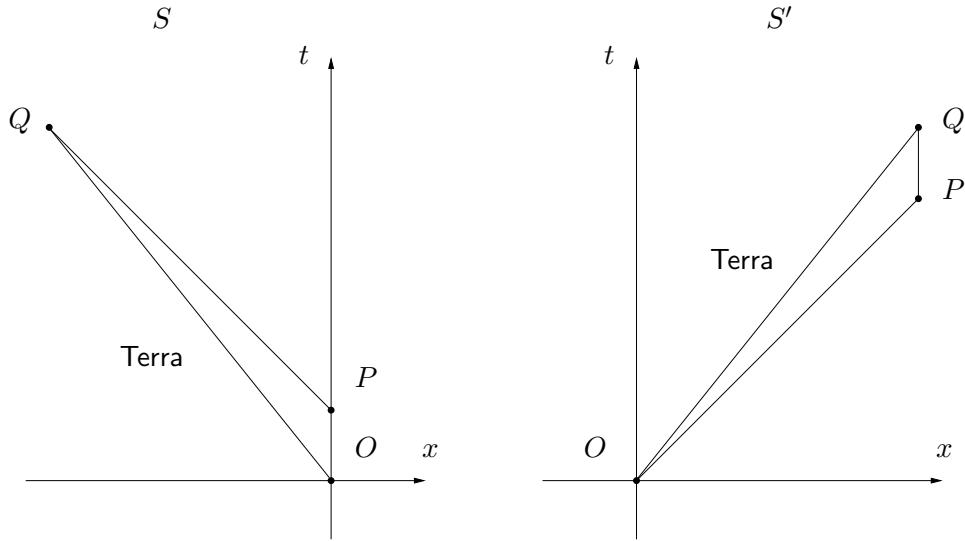


Figura 16: Diagramas de espaço-tempo para o Paradoxo dos Gémeos nos referenciais S e S' .

Logo, no referencial S'' o acontecimento O tem coordenadas $(0, 0)$, o acontecimento P tem coordenadas $(\frac{82}{3}, \frac{80}{3})$, e o acontecimento Q tem coordenadas $(\frac{100}{3}, \frac{80}{3})$. Estes acontecimentos encontram-se representados na Figura 16. Se calcularmos neste referencial o tempo medido pela Alice entre os acontecimentos O e Q obtemos de novo

$$\sqrt{\left(\frac{100}{3}\right)^2 - \left(\frac{80}{3}\right)^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ anos.}$$

Do mesmo modo, o tempo medido pelo Bernardo entre os acontecimentos O e P é dado por

$$\sqrt{\left(\frac{82}{3}\right)^2 - \left(\frac{80}{3}\right)^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ anos.}$$

Finalmente, o tempo medido pelo Bernardo entre os acontecimentos P e Q é claramente de $\frac{100}{3} - \frac{82}{3} = \frac{18}{3} = 6$ anos.

- (c) No acontecimento P , o Bernardo está a receber a luz que deixou a Terra em $t = 2$, pelo que nos 6 que durou a viagem de ida o Bernardo viu apenas 2 anos da vida da Alice (Figura 17). Consequentemente, na viagem de ida o Bernardo viu através do seu telescópio ultrapotente a Alice a mover-se em câmara lenta, a um ritmo 3 vezes inferior ao normal. Nos 6 anos da viagem de regresso, o Bernardo vai ver os restantes 18 anos que se passam para a Alice, pelo que a verá mover-se em acelerado, a um ritmo 3 vezes superior ao normal.

Por outro lado, a luz emitida a partir do acontecimento P alcança a Alice em $t = 18$ (Figura 17), pelo que ela passou 18 anos a ver os 6 anos da viagem de ida do Bernardo. Logo, ela viu o Bernardo mover-se em câmara lenta na viagem de ida, a um ritmo 3 vezes inferior ao normal. Nos restantes dois anos, a Alice vai ver os 6 anos da viagem de regresso, pelo que verá o Bernardo mover-se em acelerado, a um ritmo 3 vezes superior ao normal.

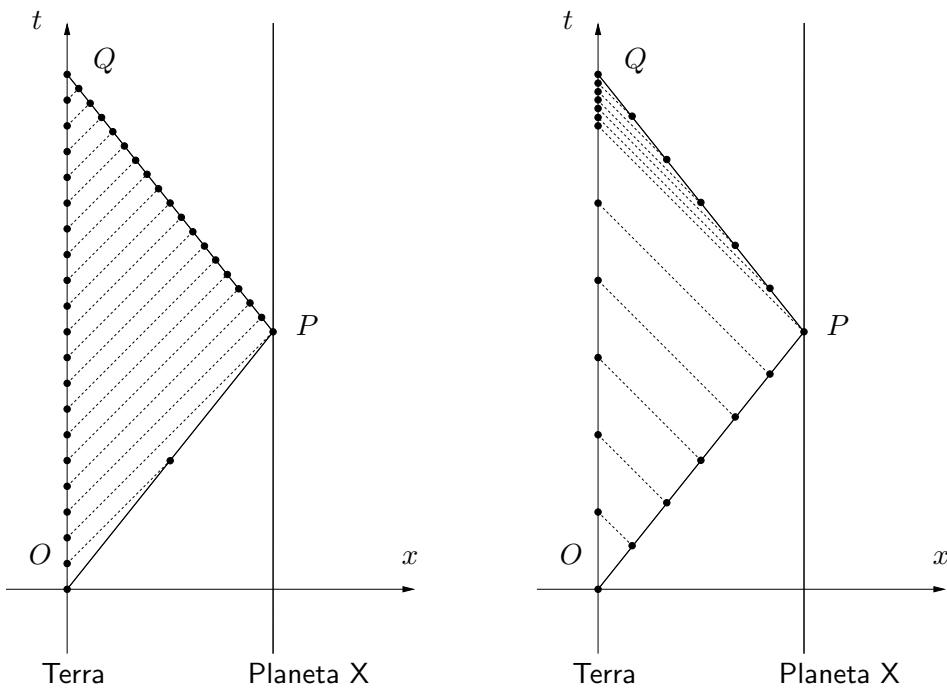


Figura 17: Diagrama de espaço-tempo para o Paradoxo dos Gémeos.

5. Se o primeiro sinal luminoso é emitido no instante $t = t_0$, a sua história é a recta de equação $t = t_0 + x$. Logo, o observador em S' detecta o sinal luminoso no acontecimento de coordenadas

$$\begin{cases} t = t_0 + x \\ x = vt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{t_0}{1-v} \\ x = \frac{vt_0}{1-v} \end{cases}$$

Do mesmo modo, o segundo sinal luminoso é emitido no instante $t = t_0 + T$, a sua história é a recta de equação $t = t_0 + T + x$, e o sinal luminoso é detectado em S' no acontecimento de coordenadas

$$\begin{cases} t = \frac{t_0 + T}{1-v} \\ x = \frac{v(t_0 + T)}{1-v} \end{cases}$$

Consequentemente, o intervalo de tempo medido em S' entre a recepção dos dois sinais é

$$\begin{aligned} T' &= \sqrt{\left(\frac{t_0 + T}{1-v} - \frac{t_0}{1-v}\right)^2 - \left(\frac{v(t_0 + T)}{1-v} - \frac{vt_0}{1-v}\right)^2} = \sqrt{\frac{T^2}{(1-v)^2} - \frac{v^2 T^2}{(1-v)^2}} \\ &= T \sqrt{\frac{1-v^2}{(1-v)^2}} = T \sqrt{\frac{(1-v)(1+v)}{(1-v)^2}} = T \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}. \end{aligned}$$

Se $v = 0,8$, por exemplo, temos

$$\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \sqrt{\frac{1,8}{0,2}} = \sqrt{9} = 3.$$

Isto é consistente com o que os gémeos do problema 4 vêem através do seu telescópio durante a viagem de ida: cada ano do outro gémeo é observado ao longo de um período de três anos. Se $v = -0,8$, por outro lado, temos

$$\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \sqrt{\frac{0,2}{1,8}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

De facto, na viagem de regresso cada um dos gémeos observa através do seu telescópio três anos do outro gémeo por ano.

Para $|v| \ll 1$, podemos aplicar a fórmula

$$\frac{1}{1-v} \simeq 1+v$$

para obter a aproximação

$$T' = T \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \simeq T \sqrt{(1+v)^2} = T(1+v).$$

6. (a) (i) Supomos que o roubo da *Einstein* é o acontecimento de coordenadas $(0,0)$ no referencial S da Terra. Então a história da *Einstein* a partir desse acontecimento é representada pela recta $x = 0,6t$. A *Enterprise* parte da Terra no acontecimento $(1,0)$, e a sua história a partir desse acontecimento é a recta $x = 0,8(t-1)$. Portanto a *Enterprise* alcança a *Einstein* no acontecimento de coodenadas

$$\begin{cases} x = 0,6t \\ x = 0,8(t-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,6t \\ 0,2t = 0,8 \end{cases} \begin{cases} t = 4 \\ x = 2,4 \end{cases}$$

Do ponto de vista de um observador no referencial da Terra a *Einstein* é então capturada 4 anos após o roubo.

- (ii) De acordo com o espião Klingon, o intervalo de tempo entre o roubo e a captura é dado por

$$\sqrt{4^2 - 2,4^2} = 3,2 \text{ anos.}$$

- (iii) De acordo com os tripulantes da *Enterprise*, a perseguição demora

$$\sqrt{(4-1)^2 - 2,4^2} = 1,8 \text{ anos,}$$

pelo que eles medem $1 + 1,8 = 2,8$ anos entre o roubo e a captura.

- (b) Uma vez que a informação do desfecho da batalha se propagará no máximo à velocidade da luz, só passados $4 + 2,4 = 6,4$ anos é que se saberá na Terra se o sinal de auto-destruição deve ser enviado.

- (c) O melhor caso possível para a *Einstein* seria esta continuar a afastar-se da Terra a 60% da velocidade da luz, correspondendo à história $x = 0,6t$. A história do sinal de rádio seria a recta $t = 6,4 + x$. Consequentemente, a auto-destruição da *Einstein* ocorreria obrigatoriamente antes do instante t dado por

$$\begin{cases} x = 0,6t \\ t = 6,4 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9,6 \\ t = 16 \end{cases}$$

A luz deste acontecimento alcançaria a Terra em $t = 16 + 9,6 = 25,6$ anos. Portanto ter-se-ia confirmação na Terra da auto-destruição da *Einstein* antes de 25,6 anos após o roubo.

7. No referencial S dos planetas, sejam $(0,0)$ as coordenadas do acontecimento O correspondente à descoberta da conspiração, $(11,0)$ as coordenadas do acontecimento L em que o míssil é lançado, $(12,12)$ as coordenadas do acontecimento D em que o planeta Lmac é destruído, e $(13,12)$ as coordenadas do acontecimento C em que a *Enterprise* chega às ruínas. Estes acontecimentos encontram-se representados na Figura 18.

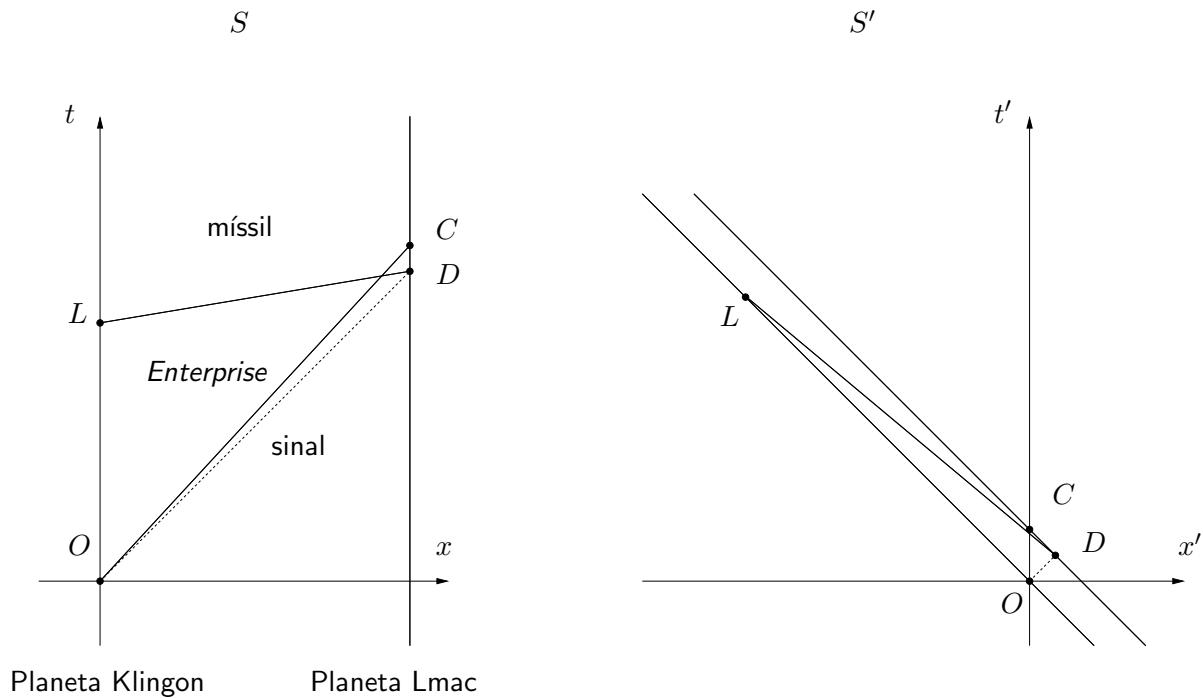


Figura 18: Diagramas de espaço-tempo para o míssil mais rápido que a luz.

- (a) A duração da viagem para os tripulantes da *Enterprise* é simplesmente o intervalo \overline{OC} , ou seja,

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ anos.}$$

- (b) O referencial S' da *Enterprise* move-se com velocidade $v = \frac{12}{13}$ em relação a S . Consequentemente, $\sqrt{1 - v^2} = \frac{5}{13}$, e portanto as coordenadas (t', x') de um acontecimento

em S' relacionam-se com as coordenadas (t, x) de um acontecimento em S mediante as transformações de Lorentz

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{13t - 12x}{5} \quad \text{e} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{13x - 12t}{5}.$$

Logo, no referencial S' o acontecimento O tem coordenadas $(0, 0)$, o acontecimento L tem coordenadas $(28, 6; -26, 4)$, o acontecimento D tem coordenadas $(2, 4; 2, 4)$, e o acontecimento C tem coordenadas $(5, 0)$ (como não podia deixar de ser).

- (c) Estes acontecimentos encontram-se representados no referencial S' da *Enterprise* na Figura 18. Em S' a sequência de eventos é portanto surreal: o planeta Lmac explode sem razão; o míssil mais rápido que a luz salta da explosão e viaja na direcção do planeta Klingon, onde uma réplica exacta está a ser construída; os dois mísseis desaparecem em simultâneo no acontecimento L . Isto mostra os absurdos que podem ocorrer se se permitem velocidades superiores à da luz.

3 Geometria Não Euclidiana

3.1 Coordenadas curvilíneas

Para além das habituais coordenadas Cartesianas, existem muitas outras possibilidades de escolha de coordenadas no plano (ditas **coordenadas curvilíneas**). Um exemplo que surge naturalmente em muitas situações (e.g. radares) são as chamadas **coordenadas polares** (r, θ) , em que cada ponto é identificado pela sua distância r à origem e pelo ângulo θ que o seu vector posição faz com o eixo dos xx (Figura 19).

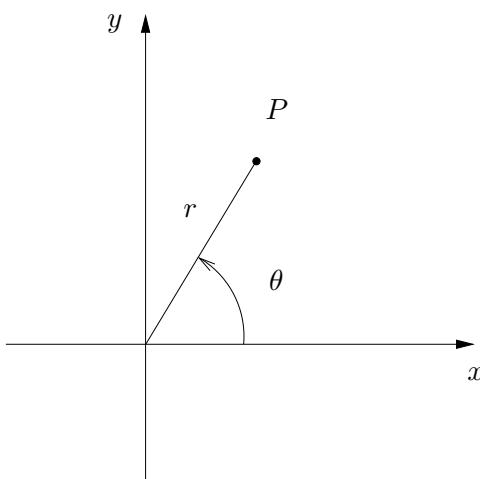


Figura 19: Coordenadas polares.

Vimos que a distância Δs entre dois pontos P_1 e P_2 do plano é dada em coodenadas Cartesianas por

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

Como calcular a distância em coordenadas polares? Começamos por observar que fixando θ e fazendo variar r de Δr percorremos uma distância Δr ao longo de uma semi-recta com início na origem (Figura 20). Do mesmo modo, fixando r e fazendo variar θ de $\Delta\theta$ percorremos uma distância $r\Delta\theta$ ao longo da circunferência de centro na origem e raio r . Uma vez que a semi-recta é perpendicular à circunferência, o Teorema de Pitágoras diz-nos que, se os pontos estão muito próximos (de forma a que o pedaço percorrido ao longo da circunferência é quase recto), então a distância entre eles é aproximadamente dada por

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2$$

(a aproximação sendo tanto melhor quanto mais próximos os pontos estiverem).

Esta fórmula permite-nos calcular o comprimento de curvas em coodenadas polares aproximando-as por linhas quebradas. A distância entre dois pontos afastados pode ser calculada calculando simplesmente o comprimento do segmento de recta que as une.

3.2 A esfera

A geometria Euclidiana ocupa-se do estudo da geometria do plano. No entanto, é muitas vezes útil estudar a geometria de outras superfícies. Por exemplo, para planear viagens marítimas ou

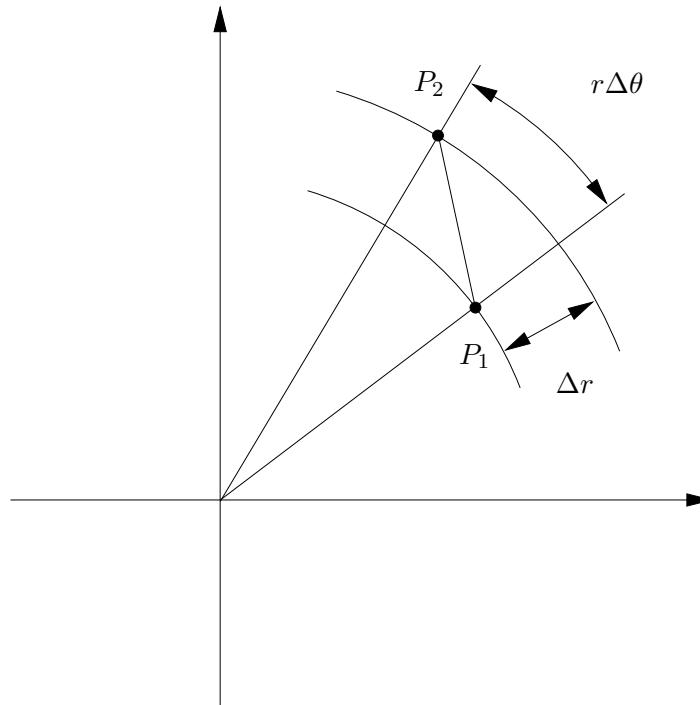


Figura 20: Distância em coordenadas polares.

aéreas é necessário compreender a geometria da esfera.

Tal como no plano, a primeira coisa a fazer é escolher um sistema de coordenadas. Para tal, fixamos um círculo máximo a que chamamos o **equador**. Recorde que um **círculo máximo** é simplesmente a intersecção da esfera com um plano que contém o centro da esfera. No caso da superfície da Terra, a escolha natural para o equador é o círculo máximo definido pelo plano perpendicular ao eixo de rotação. Os círculos resultantes da intersecção da esfera com planos paralelos ao plano do equador chamam-se **paralelos**. Note que os paralelos **não são** círculos máximos. Os pontos de intersecção da esfera com a recta que passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do equador chamam-se os **pólos**. Os arcos de círculo máximo entre os pólos chamam-se **meridianos**. Dentre estes, escolhemos um a que chamaremos o **meridiano principal**. Ao contrário do equador, não existe nenhuma escolha natural para o meridiano principal no caso da Terra, tomando-se por convenção o meridiano que passa pelo observatório astronómico de Greenwich (Londres). Qualquer meridiano pode ser identificado pelo ângulo φ que faz com o meridiano principal. A este ângulo chamamos a **longitude** do meridiano. Do mesmo modo, qualquer paralelo pode ser identificado pelo ângulo θ com o equador medido ao longo de qualquer meridiano. A este ângulo chamamos a **latitude** do paralelo. Qualquer ponto P da superfície da esfera pode ser especificado indicando o paralelo e o meridiano a que o ponto pertence (Figura 21). Podemos então usar (θ, φ) como coordenadas na superfície da esfera.

Tomando $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, podemos então representar a esfera como um rectângulo no plano (Figura 22). Nesta representação, o eixo das abcissas corresponde ao equador, o eixo das ordenadas ao meridiano principal e, mais geralmente, segmentos horizontais representam paralelos e segmentos verticais representam meridianos. Diz-se então que o rectângulo é um **mapa** (ou uma **carta**) para a esfera.

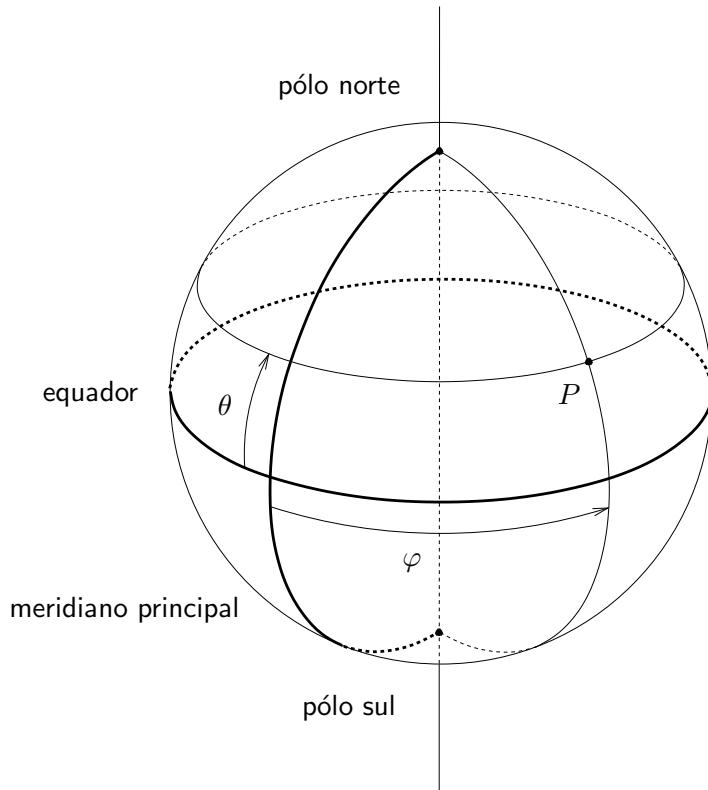


Figura 21: Coordenadas na esfera.

Uma vez que a esfera é muito diferente de um rectângulo, não é de estranhar que o mapa fornecido pelas coordenadas (θ, φ) não seja inteiramente fidedigno, representando certos pontos mais que uma vez. Nomeadamente, os segmentos $\varphi = -\pi$ e $\varphi = \pi$ representam o mesmo

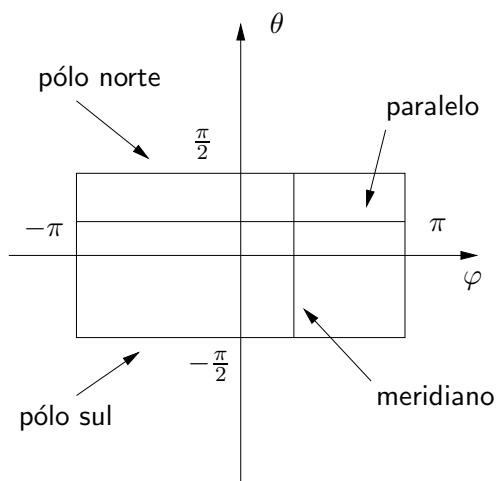


Figura 22: Mapa da esfera.

meridiano, e os segmentos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = -\frac{\pi}{2}$ correspondem cada um a um só ponto (um dos pólos). Além disso, este mapa distorce as distâncias: por exemplo, todos os paralelos são representados por segmentos com o mesmo comprimento, quando na realidade possuem comprimentos diferentes. Mais precisamente, sendo R o raio da esfera, é fácil ver que o raio do paralelo de latitude θ é $R \cos \theta$ (Figura 23), e portanto o seu comprimento é $2\pi R \cos \theta$.

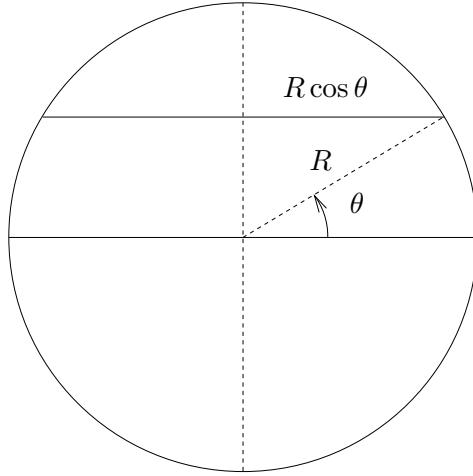


Figura 23: Raio de um paralelo.

Para calcular distâncias na esfera, começamos por observar que fixando φ e fazendo variar θ de $\Delta\theta$ percorremos uma distância $R\Delta\theta$ ao longo do meridiano de longitude φ (Figura 24). Do mesmo modo, fixando θ e fazendo variar φ de $\Delta\varphi$ percorremos uma distância $R \cos \theta \Delta\varphi$ ao longo do paralelo de latitude θ . Uma vez que os meridianos são ortogonais aos paralelos, o Teorema de Pitágoras diz-nos que, se os pontos estão muito próximos (de forma a que os pedaços de curvas percorridos são quase rectos), então a distância entre eles é aproximadamente dada por

$$\Delta s^2 = R^2 \Delta\theta^2 + R^2 \cos^2 \theta \Delta\varphi^2$$

(a aproximação sendo tanto melhor quanto mais próximos os pontos estiverem).

A expressão para a distância Δs^2 entre dois pontos muito próximos numa dada superfície chama-se a **métrica** dessa superfície. Por exemplo, vimos já que a métrica do plano se escreve $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ em coordenadas Cartesianas e $\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2 \Delta\theta^2$ em coordenadas polares. É importante frisar que apesar de estas duas expressões serem diferentes, elas contêm a mesma informação: a distância entre dois pontos muito próximos dará o mesmo valor quer seja calculado em coordenadas Cartesianas quer seja calculado em coordenadas polares. De mesmo modo, a métrica de uma esfera de raio R nas coordenadas (θ, φ) é dada por $\Delta s^2 = R^2 \Delta\theta^2 + R^2 \cos^2 \theta \Delta\varphi^2$.

3.3 Geodésicas

Agora que temos a expressão da métrica da esfera de raio R , gostaríamos de obter uma expressão para a distância entre dois quaisquer pontos da esfera (não necessariamente próximos). Recordemos que no plano isto é feito calculando o comprimento do segmento de recta (ou seja, a curva de comprimento mínimo) que une os pontos. Precisamos portanto de identificar as **geodésicas** (isto é, as curvas de comprimento mínimo) da esfera. Estas curvas desempenharão na geometria da esfera o mesmo papel das linhas rectas na geometria do plano.

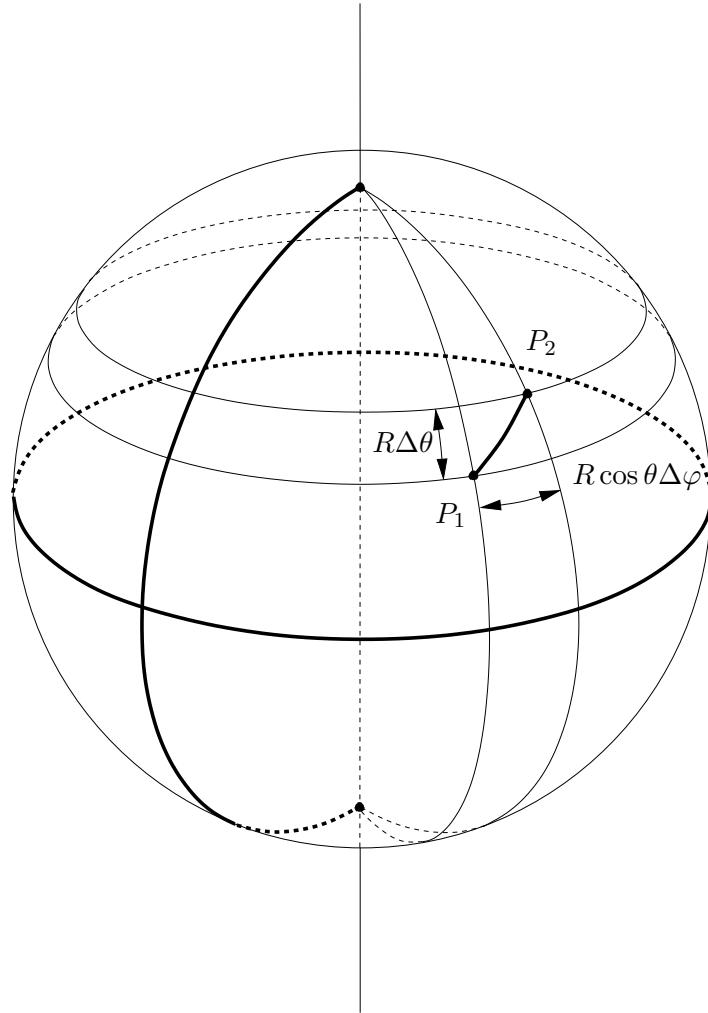


Figura 24: Distância na esfera.

Sejam então P e Q dois pontos da esfera. É sempre possível escolher coordenadas (θ, φ) tais que P e Q estão no meridiano $\varphi = 0$. Consideremos uma curva qualquer unindo P a Q . Aproximamos esta curva por uma linha quebrada escolhendo pontos muito próximos

$$P_0 = P, P_1, P_2, \dots, P_{N-1}, P_N = Q$$

ao longo da curva. Estes pontos terão coordenadas

$$(\theta_0, 0), (\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2), \dots, (\theta_{N-1}, \varphi_{N-1}), (\theta_N, 0).$$

Chamando Δs_i à distância entre P_{i-1} e P_i (com $i = 1, 2, \dots, N$), o comprimento da curva será

$$l = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N.$$

De acordo com a expressão da métrica, teremos aproximadamente

$$\Delta s_i^2 = R^2(\theta_i - \theta_{i-1})^2 + R^2 \cos^2 \theta_i (\varphi_i - \varphi_{i-1})^2$$

e portanto

$$\Delta s_i \geq R(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Concluímos que

$$l \geq R(\theta_1 - \theta_0 + \theta_2 - \theta_1 + \dots + \theta_N - \theta_{N-1}) = R(\theta_N - \theta_0),$$

que é exactamente o comprimento do arco de meridiano entre P e Q . Vemos então que a distância mínima entre dois pontos da esfera é medida ao longo do menor arco de círculo máximo que os une. Por outras palavras, as geodésicas da esfera são os círculos máximos.

3.4 Curvatura

Agora que conhecemos as geodésicas da esfera podemos estudar a sua geometria, que é bastante diferente da geometria do plano. Por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre **superior** a π : na Figura 25 pode ver-se um triângulo na esfera com **três** ângulos rectos.

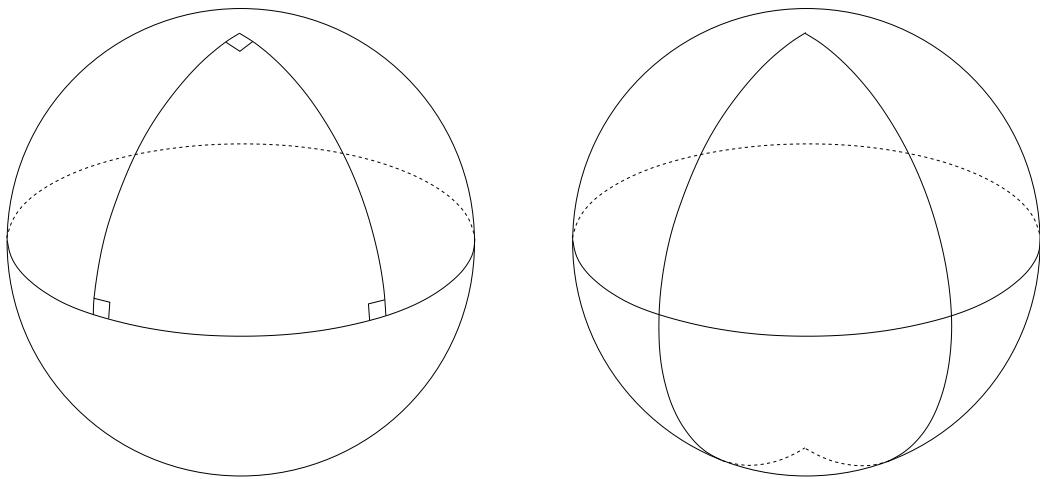


Figura 25: Triângulo esférico com três ângulos rectos e polígono com 2 lados.

Dado um triângulo esférico, a diferença entre a soma dos ângulos internos e π chama-se o **excesso esférico**. Por exemplo, para o triângulo da Figura 25 o excesso esférico é $\frac{\pi}{2}$. A **curvatura média** de um triângulo esférico é a razão entre o excesso esférico e a área do triângulo. Recordando que a área de uma esfera de raio R é de $4\pi R^2$, e notando que uma esfera completa é formada por 8 triângulos iguais ao da Figura 25, concluímos que a curvatura média desse triângulo é

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{4\pi R^2} = \frac{1}{R^2}$$

A **curvatura** de uma superfície num ponto é simplesmente o valor da curvatura média de um triângulo muito pequeno desenhado em torno desse ponto. Portanto a curvatura num dado ponto mede o quanto que a geometria da superfície nesse ponto difere da geometria do plano. A esfera tem a propriedade de ser uma superfície de **curvatura constante**: todos os triângulos possuem a mesma curvatura média, e portanto a curvatura da esfera em qualquer ponto é $\frac{1}{R^2}$.

Uma consequência interessante do excesso esférico é que existem na esfera polígonos com apenas dois lados (por exemplo polígonos cujas arestas são meridianos, como se pode ver na Figura 25). A existência destes polígonos é portanto um sinal da presença de curvatura.

3.5 Outros mapas da esfera

Tal como acontecia no plano, existem muitas escolhas possíveis de coordenadas na esfera. Uma possibilidade é utilizar a chamada **projecção cilíndrica**, que consiste em projectar cada ponto P da esfera num ponto Q da superfície cilíndrica tangente à esfera no equador, perpendicularmente a partir do eixo (Figura 26). A superfície cilíndrica pode depois ser desenrolada num rectângulo de altura $2R$ e comprimento $2\pi R$. Escolhendo coordenadas Cartesianas (x, y) com origem no centro neste rectângulo, vemos que o equador se projecta no eixo dos xx , os paralelos em rectas horizontais e os meridianos em rectas verticais. De forma semelhante ao que fizemos para as coordenadas (θ, φ) , pode mostrar-se que a métrica da esfera nestas coordenadas é

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \Delta x^2 + \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)^{-1} \Delta y^2.$$

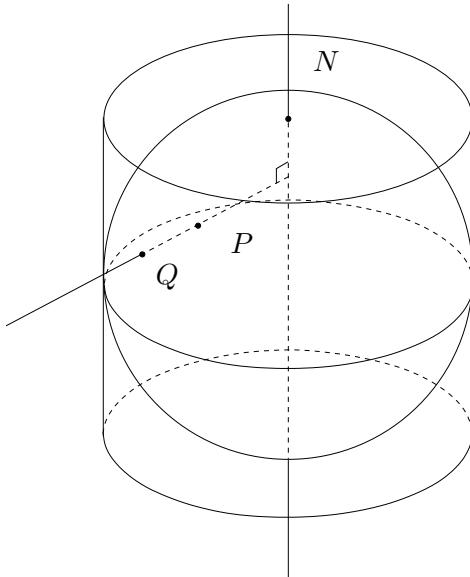


Figura 26: Projecção cilíndrica.

Esta expressão tem a particularidade de os coeficientes de Δx^2 e de Δy^2 serem inversos um do outro. Pode mostrar-se que quando isto acontece a projecção preserva áreas, isto é, a área de uma dada figura na esfera é igual à área da sua representação no mapa.

Uma outra projecção famosa é a chamada **projecção estereográfica**, na qual cada ponto P da esfera é projectado num ponto Q do plano que contém o equador a partir do pólo norte (Figura 27). Escolhendo coordenadas Cartesianas (x, y) no plano com origem no centro da esfera, vemos que o equador se projecta na circunferência de raio R e centro na origem, os paralelos em círculos concéntricos e os meridianos em rectas que passam pela origem. A métrica da esfera nestas coordenadas é

$$\Delta s^2 = 4 \left(1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}\right)^{-2} \Delta x^2 + 4 \left(1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}\right)^{-2} \Delta y^2.$$

Esta expressão tem a particularidade de os coeficientes de Δx^2 e de Δy^2 serem iguais. Pode mostrar-se que quando isto acontece a projecção preserva ângulos, isto é, o ângulo entre duas

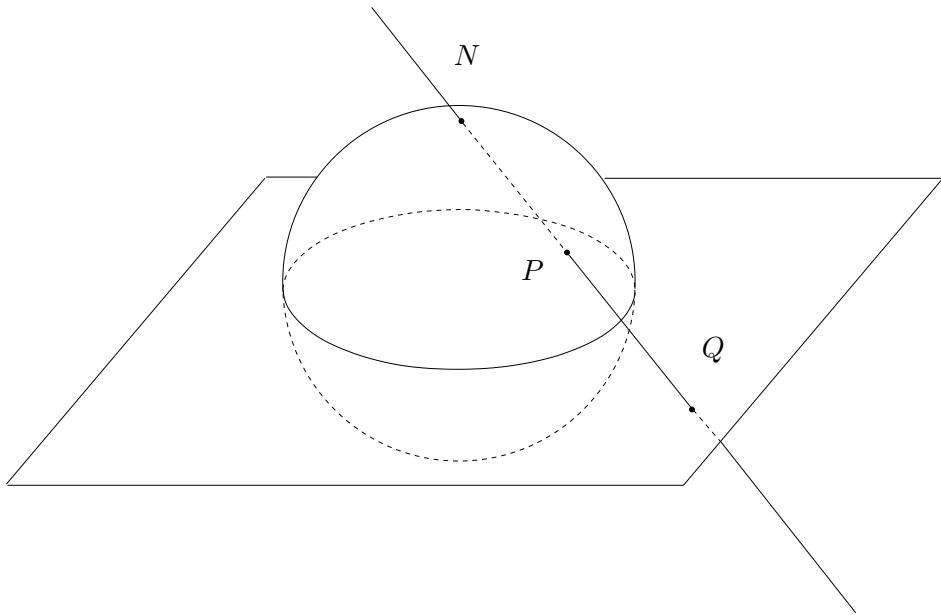


Figura 27: Projecção estereográfica.

curvas na esfera é igual ao ângulo entre as suas representações no mapa (que se diz então um **mapa conforme**).

O mapa que usa a latitude e a longitude como coordenadas não preserva áreas nem é conforme. Os planisférios usuais empregam a chamada **projecção de Mercator**¹². Esta obtém-se da projecção cilíndrica deformando-a verticalmente até se tornar um mapa conforme (o que faz com que as linhas de rumo constante sejam representadas por linhas rectas no mapa).

3.6 Outras geometrias

A geometria da esfera é apenas um exemplo de uma geometria não Euclidiana. Para cada superfície diferente teremos em geral uma geometria diferente, a maior parte das quais não possuirá curvatura constante. Muitas terão curvatura negativa, isto é, a soma dos ângulos internos de um triângulo será **inferior** a π . Outras serão planas, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo será **igual** a π . Exemplos destas últimas são, surpreendentemente, o cilindro e o cone. É por isso que podemos enrolar uma folha de papel de modo a que esta forme um cilindro ou um cone, mas não uma esfera.

Por analogia, podemos considerar espaços curvos com três ou mais de dimensões. Apesar de em geral ser impossível visualizar estes espaços, tudo o que precisamos para estudar a sua geometria é da expressão da métrica num qualquer sistema de coordenadas.

As ideias da geometria não Euclidiana foram desenvolvidas sobretudo por Gauss¹³ e Riemann¹⁴, que as generalizou para espaços com uma qualquer número de dimensões. Por essa razão, a métrica de uma superfície (ou mais geralmente de um espaço curvo com mais dimensões) chama-se habitualmente uma **métrica Riemanniana**.

¹²Gerardus Mercator (1512–1594), cartógrafo flamengo

¹³Carl Friedrich Gauss (1777–1855), matemático, físico e astrónomo alemão.

¹⁴Georg Bernhard Riemann (1826–1866), matemático alemão

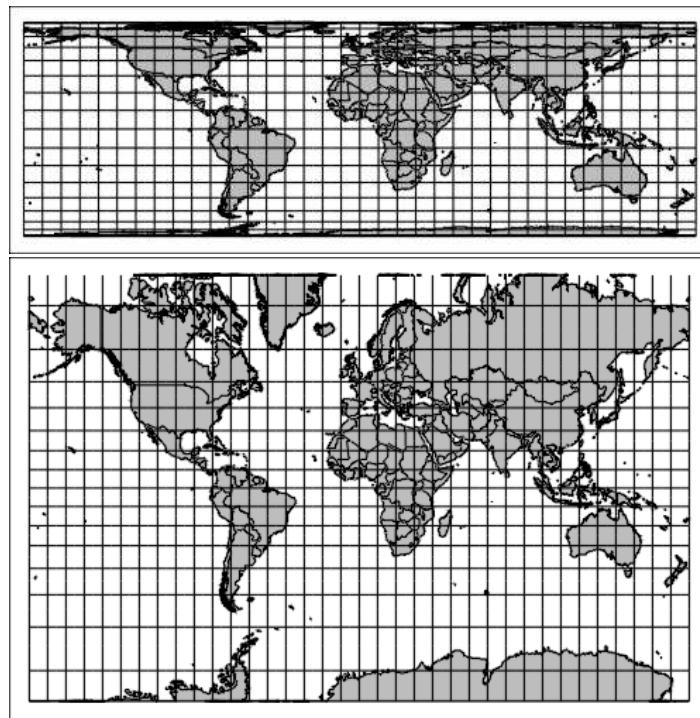


Figura 28: Planisférios usando a projecção cilíndrica e a projecção de Mercator.

3.7 Exercícios

1. Lisboa e Nova Iorque estão aproximadamente à mesma latitude (40°). No entanto, um avião que voe de Lisboa para Nova Iorque não parte de Lisboa na direcção oeste. Porquê?
2. Considere dois pontos na esfera à mesma latitude $\theta = \frac{\pi}{4}$ mas com longitudes diferindo de π . Mostre que a distância entre os dois pontos é menor que o comprimento do arco de paralelo entre eles.



Figura 29: Gauss e Riemann.

3. Indique se as afirmações seguintes são verdadeiras para a geometria do plano e para a geometria da esfera:
- Todas as geodésicas se intersectam.
 - Se duas geodésicas distintas se intersectam, fazem-no num único ponto.
 - Dada uma geodésica γ e um ponto $p \notin \gamma$, existe uma geodésica γ' contendo p que não intersecta γ (quinto postulado de Euclides).
 - Dados dois pontos distintos, existe uma geodésica que os contém.
 - Dados dois pontos distintos, existe uma única geodésica que os contém.
 - Existem pontos tão afastados quanto se quiser.
 - Todas as geodésicas são curvas fechadas.
 - A soma dos ângulos internos de um triângulo é π .
 - O perímetro de uma circunferência de raio r é $2\pi r$.
 - A área de um círculo de raio r é πr^2 .
4. Mostre que a curvatura média de um triângulo esférico em que um dos vértices é o pólo norte e os outros dois vértices estão no equador é $\frac{1}{R^2}$.
5. Qual é a relação entre a soma dos ângulos internos de um polígono na esfera com 2 lados e a sua área?
6. Verifique que a projecção cilíndrica preserva a área de triângulos esféricos em que um dos vértices é o pólo norte e os outros dois vértices estão no equador.
7. Mostre que nem a projecção estereográfica nem o mapa da esfera que utiliza como coordenadas a latitude e a longitude preservam áreas.
8. Mostre que nenhum mapa da esfera pode simultaneamente preservar áreas e ser conforme.

3.8 Soluções

- Porque a distância mais curta entre Lisboa e Nova Iorque não se mede ao longo do paralelo que passa pelas duas cidades, mas sim ao longo do círculo máximo que as contém. Este círculo é a intersecção da superfície da Terra com o plano definido por Lisboa, Nova Iorque e o centro da Terra. Portanto o caminho mais curto entre Lisboa e Nova Iorque é uma curva que segue inicialmente para noroeste.
- Os dois pontos estão no mesmo meridiano, fazendo um ângulo de $\frac{\pi}{2}$. A distância entre eles é então $\frac{\pi R}{2}$. O raio do paralelo que os contém é $R \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}R}{2}$, e a diferença de latitudes é π . O comprimento do arco de paralelo entre os dois pontos é então $\frac{\pi\sqrt{2}R}{2} > \frac{\pi R}{2}$.
- (a) Plano: falsa (existem rectas paralelas). Esfera: verdadeira.
 (b) Plano: verdadeira. Esfera: falsa (intersectam-se sempre em dois pontos).
 (c) Plano: verdadeira. Esfera: falsa.
 (d) Plano: verdadeira. Esfera: verdadeira.
 (e) Plano: verdadeira. Esfera: falsa (por exemplo qualquer meridiano contém os pólos).

- (f) Plano: verdadeira. Esfera: falsa (a distância máxima entre dois pontos é πR).
 (g) Plano: falsa. Esfera: verdadeira.
 (h) Plano: verdadeira. Esfera: falsa.
 (i) Plano: verdadeira. Esfera: falsa (por exemplo o equador é uma circunferência centrada no pólo norte com raio $r = \frac{\pi}{2}R$, mas o seu perímetro é $2\pi R = 4r \neq 2\pi r$).
 (j) Plano: verdadeira. Esfera: falsa (por exemplo o hemisfério norte é um círculo centrado no pólo norte com raio $r = \frac{\pi}{2}R$, mas a sua área é $2\pi R^2 = \frac{8}{\pi}r^2 \neq \pi r^2$).
4. Seja α o ângulo correspondente ao vértice que está no pólo norte. Uma vez que os ângulos correspondentes aos vértices que estão no equador são rectos, o excesso esférico é exactamente α . Por outro lado, o triângulo contém uma fracção $\frac{\alpha}{2\pi}$ da área $2\pi R^2$ do hemisfério norte, pelo que a sua área é então αR^2 . Concluímos que a curvatura média do triângulo é
- $$\frac{\alpha}{\alpha R^2} = \frac{1}{R^2}.$$
5. Seja α o valor de cada um dos ângulos internos do polígono. Então este contém uma fracção $\frac{\alpha}{2\pi}$ da área $4\pi R^2$ da esfera, pelo que a sua área é então $2\alpha R^2$. Concluímos que a razão entre a soma dos ângulos internos do polígono e a sua área é
- $$\frac{2\alpha}{2\alpha R^2} = \frac{1}{R^2}.$$
6. Se α é o ângulo correspondente ao vértice no pólo norte, o triângulo contém uma fracção $\frac{\alpha}{2\pi}$ da área $2\pi R^2$ do hemisfério norte, pelo que a sua área é αR^2 . É fácil ver que o triângulo se projecta num rectângulo com a mesma base αR e altura igual ao raio R da esfera. Portanto a área da projecção é αR^2 , igual à área do triângulo.
7. No caso da projecção estereográfica, o produto dos coeficientes de Δx^2 e de Δy^2 é

$$16 \left(1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}\right)^{-4} \neq 1.$$

Para o mapa da esfera que utiliza como coordenadas a latitude e a longitude, o produto dos coeficientes de $\Delta\theta^2$ e de $\Delta\varphi^2$ é

$$R^4 \cos^2 \theta \neq 1.$$

8. Um mapa conforme da esfera é da forma

$$\Delta s^2 = A(x, y)\Delta x^2 + A(x, y)\Delta y^2$$

para um certo coeficiente $A(x, y)$. Se preservassemos áreas, teríamos que ter

$$A^2 = 1 \Rightarrow A = 1.$$

Mas então a métrica da esfera neste sistema de coordenadas seria

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

ou seja, igual à métrica do plano. Em particular, as geodésicas da esfera seriam representadas por linhas rectas no mapa, e a soma dos ângulos internos de um triângulo seria sempre π , o que sabemos não ser verdade para a esfera. Logo, nenhum mapa conforme da esfera pode preservar áreas.

4 Gravidade

4.1 Lei da Gravitação Universal

Na Física Newtoniana, a gravidade é simplesmente uma força atractiva que se exerce entre dois quaisquer corpos, ao longo da linha recta que os une. Se os corpos possuem massas M e m e estão separados por uma distância r , a intensidade F da força entre eles é dada pela **lei da gravitação universal**:

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

onde G é a chamada **constante de gravitação universal**. Em rigor, esta lei só é válida para massa pontuais; a força entre dois corpos de dimensões não desprezáveis obtém-se subdividindo-os em pedaços muito pequenos e somando as contribuições de cada par de pedaços. Pode mostrar-se que para um **corpo esférico** o resultado é o mesmo que o que se obteria colocando uma massa pontual com o mesmo valor no seu centro. Em particular, a aceleração gravitacional de uma partícula de massa m devida a um corpo esférico de massa M é

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2},$$

onde r é a distância ao centro do corpo. Note-se que g não depende do valor da massa m ; isto explica porque é que a aceleração da gravidade é a mesma para todos os corpos.

Pode mostrar-se que a energia potencial gravitacional do sistema formado pelas massas M e m é

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

(onde se convenciona que massas infinitamente afastadas possuem energia zero). Esta energia é negativa, uma vez que a gravidade é atractiva: para separar infinitamente as duas massas é necessário fornecer energia ao sistema. O **potencial gravitacional** (energia potencial por unidade de massa) devido a um corpo esférico de massa M é então

$$\phi = -\frac{GM}{r}.$$

4.2 Unidades

Para simplificar as nossas fórmulas, vamos utilizar **unidades geometrizadas**, nas quais $G = 1$. Nestas unidades, as massas passam a medir-se em metros. Por exemplo, a massa do Sol em unidades geometrizadas é de cerca de 1,5 quilómetros, e a da Terra é de cerca de 4,5 milímetros. Iremos ver que isto significa que um buraco negro com a massa do Sol possui um raio de $2 \times 1,5 = 3$ quilómetros, enquanto que um buraco negro com a massa da Terra possui um raio de $2 \times 4,5 = 9$ milímetros.

4.3 Velocidade de escape

Consideremos o movimento de queda livre de uma partícula pontual de massa m desprezável (por exemplo a Terra) no campo gravitacional criado por um corpo esférico de massa M (por exemplo o Sol), que podemos supor fixo na origem de um referencial inercial. Pode mostrar-se que a **energia mecânica** (por unidade de massa) da partícula,

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{M}{r},$$

é conservada ao longo do movimento (onde v é a velocidade de m). Em particular,

$$\frac{M}{r} \geq -E.$$

Consequentemente, se $E < 0$ então

$$r \leq -\frac{M}{E},$$

ou seja, m nunca se conseguirá afastar mais que $-\frac{M}{E}$ do centro de M . Para que m se possa afastar arbitrariamente de M é necessário que $E \geq 0$. Isto quer dizer que para m poder escapar à atracção de M a partir de um ponto à distância r do centro de M deve ser lançada com velocidade

$$v \geq \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

A esta velocidade mínima chama-se a **velocidade de escape**.

4.4 Leis de Kepler

É fácil ver que o movimento da massa m se dá ao longo de um plano. Introduzindo coordenadas polares (r, θ) no plano do movimento, com origem no centro da massa M , vemos da expressão da métrica em coordenadas polares que o quadrado da velocidade da partícula será

$$v^2 = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{\Delta t} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right)^2.$$

Portanto a energia mecânica da partícula é dada por

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta r}{\Delta t} \right)^2 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right)^2 - \frac{M}{r}.$$

Pode ainda mostrar-se que o **momento angular** (por unidade de massa) da partícula,

$$L = r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t},$$

é também conservado ao longo do seu movimento.

Podemos reescrever as leis de conservação na forma

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} &= \frac{L}{r^2}; \\ \frac{\Delta r}{\Delta t} &= \pm \sqrt{2E + \frac{2M}{r} - \frac{L^2}{r^2}}. \end{aligned}$$

Estas equações são exemplos de **equações diferenciais**, e podem ser utilizadas para determinar os possíveis movimentos de m . A ideia é a seguinte: suponhamos que pretendemos saber qual é o movimento com certos valores de E e L que passa no ponto de coordenadas (r_0, θ_0) no instante $t = 0$. As equações diferenciais acima permitem-nos calcular os valores aproximados $r_1 = r_0 + \Delta r_0$ e $\theta_1 = \theta_0 + \Delta \theta_0$ de (r, θ) no instante Δt . Repetindo este processo com r_1 e θ_1 , podemos calcular os valores aproximados $r_2 = r_1 + \Delta r_1$ e $\theta_2 = \theta_1 + \Delta \theta_1$ de (r, θ) no instante $2\Delta t$, e, em geral, os valores aproximados $r_n = r_{n-1} + \Delta r_{n-1}$ e $\theta_n = \theta_{n-1} + \Delta \theta_{n-1}$ no instante $n\Delta t$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. A aproximação será tanto melhor quanto mais pequeno for Δt .

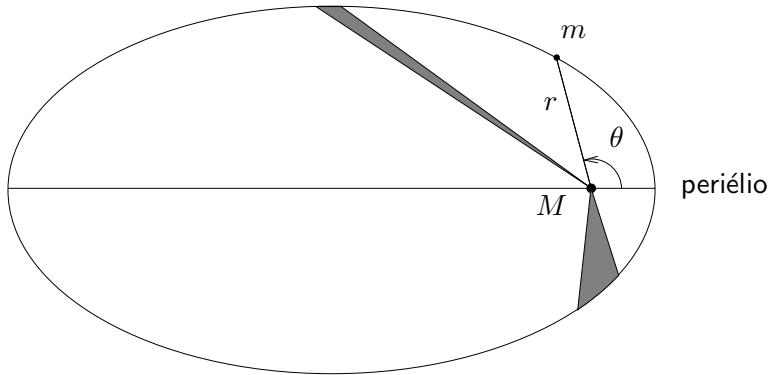


Figura 30: Leis de Kepler.

As equações diferenciais acima foram resolvidas de forma exacta por Newton¹⁵, que descobriu que as órbitas com energia negativa são na realidade **elipses**, com o centro de M num dos focos (**primeira lei de Kepler**¹⁶). Além disso, a lei de conservação do momento angular tem a interpretação geométrica de que o segmento de recta que une o centro de M à partícula m varre áreas iguais em tempos iguais (**segunda lei de Kepler**). Em particular, m move-se mais rapidamente quando está próxima de M (Figura 30). Kepler havia deduzido as suas leis de forma empírica a partir de observações astronómicas do movimento dos planetas. Newton mostrou que estas leis eram na verdade consequências matemáticas da sua lei da gravitação universal.



Figura 31: Kepler e Newton.

4.5 Órbitas circulares

Da equação diferencial para r é evidente que devemos ter

$$2E + \frac{2M}{r} - \frac{L^2}{r^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2Er^2 + 2Mr - L^2 \geq 0.$$

¹⁵Sir Isaac Newton (1643–1727), físico, matemático, astrónomo, filósofo e alquimista inglês.

¹⁶Johannes Kepler (1571–1630), matemático, astrónomo e astrólogo alemão

Se $E < 0$, vemos que r só pode variar entre as duas raízes do polinómio acima,

$$r_{\pm} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 + 2EL^2}}{2E},$$

que correspondem aos pontos da elipse mais próximo e mais afastado do centro de M , ambos situados sobre o eixo maior. O ponto mais próximo do centro de M chama-se o **periélio**¹⁷ da órbita. Se $r_- = r_+$, isto é, se

$$E = -\frac{M^2}{2L^2},$$

a órbita terá que ser uma circunferência de raio

$$r = -\frac{M}{2E} = \frac{L^2}{M}.$$

Portanto teremos para órbitas circulares

$$\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2 = \frac{M}{r^3}.$$

Em particular, a velocidade orbital será dada por

$$v = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \sqrt{\frac{M}{r}}.$$

Note-se que a velocidade de escape num dado ponto é $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da órbita circular que passa por esse ponto. Podemos portanto encarar a velocidade da órbita circular como uma espécie de velocidade característica do campo gravitacional. É então de esperar que os efeitos da Relatividade Geral se tornem importantes apenas quando esta velocidade for comparável à velocidade da luz. Para campos gravitacionais usuais, esta velocidade é muito inferior à da luz (portanto $\frac{M}{r} \ll 1$).

4.6 Fórmulas importantes

- Aceleração da gravidade:

$$g = \frac{M}{r^2}$$

- Potencial gravitacional:

$$\phi = -\frac{M}{r}$$

- Velocidade de escape:

$$v = \sqrt{\frac{2M}{r}}$$

- Velocidade de uma órbita circular:

$$v = \sqrt{\frac{M}{r}}$$

¹⁷Em rigor, este ponto chama-se o pericentro, devendo o termo periélio ser reservado para órbitas em torno do Sol; no entanto este abuso de linguagem é frequente.

4.7 Exercícios

1. Sabendo que a aceleração da gravidade à superfície da Terra é de cerca de 9,8 metros por segundo quadrado, calcule a massa da Terra em unidades geometrizadas.
2. Calcule a velocidade de escape a partir da superfície da Terra.
3. A órbita do cometa Halley é uma elipse muito alongada, que o leva a afastar-se do Sol quase até à órbita de Plutão. Portanto, o cometa Halley (como a maioria dos cometas) move-se praticamente à velocidade de escape do Sistema Solar. Sabendo que periélio da sua órbita dista cerca de 4,9 minutos-luz do Sol, calcule a velocidade do cometa Halley neste ponto.
4. Relativamente à Figura 30, mostre que quando a coordenada θ varia de uma quantidade muito pequena $\Delta\theta$, o segmento de recta que une o centro de M à partícula m varre uma área aproximada $\Delta A = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$. Conclua que a lei de conservação do momento angular pode ser interpretada geometricamente como a afirmação de que a velocidade a que a esta área é varrida é constante.
5. Calcule a massa do Sol em unidades geometrizada a partir do período da órbita da Terra.
6. Calcule o período de uma órbita circular baixa em torno da Terra.
7. Calcule o raio da órbita geoestacionária (isto é, a órbita circular em torno da Terra com período igual a 24 horas). Calcule também o raio das órbitas dos satélites do GPS, cujo período é de cerca de 12 horas.
8. Calcule o período da órbita da Lua. (Distância da Terra à Lua: cerca de 1,3 segundos-luz).

4.8 Soluções

1. Em unidades geometrizadas, a aceleração da gravidade à superfície da Terra será

$$9,8 \times \frac{1 \text{ metro}}{(1 \text{ segundo})^2} = 9,8 \times \frac{1 \text{ metro}}{(3 \times 10^8 \text{ metros})^2} \simeq 1,1 \times 10^{-16} \text{ metros}^{-1}.$$

Por outro lado, sabemos que o raio da Terra é $r \simeq 6400$ quilómetros. Da fórmula para a aceleração gravitacional, $g = \frac{M}{r^2}$, concluímos então que a massa da Terra em unidades geometrizadas é

$$M = gr^2 = 1,1 \times 10^{-16} \times (6,4 \times 10^6)^2 \simeq 4,5 \times 10^{-3} \text{ metros},$$

ou seja, cerca de 4,5 milímetros.

2. A velocidade de escape a partir da superfície da Terra é, em unidades geometrizadas,

$$v = \sqrt{\frac{2M}{r}} = \sqrt{\frac{9,0 \times 10^{-3}}{6,4 \times 10^6}} \simeq 3,8 \times 10^{-5}.$$

Podemos obter a velocidade em quilómetros por segundo multiplicando este valor pela velocidade da luz:

$$v = 3,8 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^5 \simeq 11 \text{ quilómetros por segundo.}$$

3. A velocidade do cometa Halley será aproximadamente a velocidade de escape a 4,9 minutos-luz do Sol. Uma vez que a massa do Sol é de cerca de 1,5 quilómetros, a velocidade será então

$$v = \sqrt{\frac{2M}{r}} = \sqrt{\frac{3,0}{4,9 \times 60 \times 300000}} \simeq 1,8 \times 10^{-4}.$$

Podemos obter a velocidade em quilómetros por segundo multiplicando este valor pela velocidade da luz:

$$v = 1,8 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^5 \simeq 54 \text{ quilómetros por segundo.}$$

4. Quando a coordenada θ varia de uma quantidade muito pequena $\Delta\theta$ na Figura 30, o comprimento r do segmento de recta que une o centro de M à partícula m quase não varia. Portanto a área varrida ΔA é bem aproximada pela área de um sector circular de raio r e ângulo ao centro $\Delta\theta$. A área deste sector é uma fração $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ da área do círculo de raio r , ou seja, $\Delta A = \frac{\Delta\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$. Portanto o momento angular da órbita pode ser escrito como $L = 2\frac{\Delta A}{\Delta t}$, e a lei de conservação do momento angular é equivalente à afirmação de que a velocidade a que a área é varrida é constante.
5. Uma vez que a órbita da Terra é aproximadamente circular, a sua velocidade orbital satisfaz

$$v = \sqrt{\frac{M}{r}},$$

onde M é a massa do Sol e r é a distância da Terra ao Sol. Por outro lado, o período da órbita da Terra é $T = 1$ ano, e a distância da Terra ao Sol é $r = 8,3$ minutos-luz. Usando minutos e minutos-luz como unidades, vemos que a velocidade orbital da Terra é

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 8,3}{365 \times 24 \times 60} \simeq 1,0 \times 10^{-4}.$$

Logo a massa geometrizada do Sol é

$$M = v^2 r = 10^{-8} \times 8,3 \times 60 \times 3 \times 10^5 \simeq 1,5 \text{ quilómetros.}$$

6. Para uma órbita circular baixa em torno da Terra temos $r \simeq 6400$ quilómetros. O período da órbita será

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{M}}.$$

Como $\frac{M}{r^2} = g \simeq 9,8$ metros por segundo quadrado, temos então

$$T \simeq 2\pi \times \sqrt{\frac{6,4 \times 10^6}{9,8}} \simeq 5100 \text{ segundos} \simeq 85 \text{ minutos.}$$

7. Se T é o período de uma órbita circular então

$$vT = 2\pi r \Leftrightarrow T \sqrt{\frac{M}{r}} = 2\pi r \Leftrightarrow r = \left(\frac{MT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Para a órbita geoestacionária, temos $M \simeq 4,5$ milímetros e $T \simeq 24$ horas. Convertendo em quilómetros, vem

$$r = \left(\frac{4,5 \times 10^{-6} \times (24 \times 3600 \times 300000)^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 42000 \text{ quilómetros.}$$

Para a órbita dos satélites do GPS, $T \simeq 12$ horas, pelo que

$$r = \left(\frac{4,5 \times 10^{-6} \times (12 \times 3600 \times 300000)^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 27000 \text{ quilómetros.}$$

8. Para a órbita (circular) da Lua temos $r \simeq 1,3$ segundos-luz a $M \simeq 4,5$ milímetros. Convertendo em segundos, o período da órbita vem

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{M}} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{1,3^3 \times 3 \times 10^5}{4,5 \times 10^{-6}}} \simeq 2,4 \times 10^6 \text{ segundos,}$$

ou seja, cerca de 28 dias.

5 Relatividade Geral

5.1 Princípio da Equivalência

Em 1907, apenas dois anos depois da publicação da Teoria da Relatividade Restrita, Einstein teve, nas suas próprias palavras, “a ideia mais feliz da sua vida”. Esta ideia, a que mais tarde deu o nome de **Princípio da Equivalência**, resumia-se a isto: para um observador em queda livre, tudo se passa como se não houvesse gravidade.

Para compreender o que é que Einstein queria dizer com isto, recordemos que a aceleração da gravidade é a **mesma** para todos os corpos, independentemente da sua massa. Isto é ilustrado pela lendária experiência em que Galileu teria deixado cair pedras de diferentes tamanhos do alto da Torre de Pisa, tendo estas atingido o chão em simultâneo. Se Galileu saltasse juntamente com as pedras, vê-las-ia flutuar à sua volta, e poderia por momentos imaginar que estava num ambiente sem gravidade. Isto é exactamente o que acontece com os astronautas em órbita (Figura 32). É comum ter-se a ideia de que não existe gravidade em órbita, mas esta ideia é evidentemente disparatada: se não houvesse gravidade, não haveria nenhuma força a actuar sobre o veículo espacial, e este afastar-se-ia da Terra em linha recta com velocidade constante, de acordo com a lei da inércia. Na verdade, um veículo espacial em órbita está em queda livre à volta da Terra; daí que os seus ocupantes pareçam flutuar no seu interior.



Figura 32: Um astronauta em órbita.

5.2 Desvio gravitacional para o vermelho

A primeira experiência à qual Einstein aplicou o Princípio da Equivalência foi a seguinte: suponhamos que Einstein, a partir de um andar intermédio da Torre de Pisa, envia um sinal luminoso de período T na direcção de Galileu, no topo da torre. Qual o período T' medido por Galileu para o mesmo sinal?

Para responder a esta pergunta, suponhamos que tanto Einstein como Galileu saltavam da torre no instante de emissão do sinal. Então estariam num referencial em queda livre, isto é, num referencial equivalente a um referencial inercial (sem gravidade). Portanto o Galileu em queda livre mediria um período $T'' = T$ para o sinal luminoso (já que está parado em relação ao Einstein em queda livre, ambos num referencial inercial). Seja Δz a distância vertical que separa Einstein de Galileu, e g a aceleração da gravidade. Então o sinal luminoso demora um tempo $\Delta z / c$ a chegar ao

cimo da torre (em unidades nas quais $c = 1$), e neste intervalo de tempo o Galileu em queda livre adquire uma velocidade $v = g\Delta z$ em relação ao Galileu parado (supomos aqui que esta velocidade é muito menor que a da luz, $v \ll 1$, de forma que esta fórmula Newtoniana é aproximadamente verdadeira; supomos também que o período do sinal luminoso é muito inferior ao tempo que o sinal demora a chegar ao cimo da torre, $T \ll \Delta z$). De acordo com a fórmula do efeito de Doppler (Exercício 5 da Secção 2), devemos ter

$$T' = (1 + g\Delta z)T,$$

ou seja, o Galileu no cimo da torre mede um período **maior** para o sinal luminoso. Uma vez que o período da luz visível aumenta do azul para o vermelho, é usual chamar a este efeito o **desvio gravitacional para o vermelho**.

Recordemos que a energia potencial de uma partícula à superfície da Terra é $U = mgz$, pelo que o correspondente potencial gravitacional é $\phi = gz$. Outro modo de escrever a fórmula do desvio gravitacional para o vermelho é então

$$T' = (1 + \Delta\phi)T.$$

Esta fórmula continua a ser válida mesmo quando o campo não é uniforme (basta considerar um número suficiente de observadores intermédios para os quais o campo é aproximadamente uniforme). Uma vez que os dois observadores estão em repouso um em relação ao outro, esta fórmula só pode ser interpretada como significando que o tempo decorre a ritmos diferentes para observadores em pontos diferentes de um dado campo gravitacional: observadores em pontos mais baixos medem intervalos de tempo menores.

5.3 Espaço-tempo curvo

A Figura 33 mostra claramente que o desvio gravitacional para o vermelho não é compatível com a geometria de Minkowski, segundo a qual observadores em repouso num dado referencial inercial medem o mesmo período para um dado sinal luminoso. Para representar o desvio gravitacional para o vermelho necessitamos de um diagrama de espaço-tempo que distorça intervalos, tal como qualquer mapa da esfera distorce distâncias. Isto levou Einstein a conjecturar que a existência de um campo gravitacional seria equivalente ao espaço-tempo ser curvo.

Uma região pequena de uma superfície curva (por exemplo uma esfera) parece aproximadamente plana¹⁸, a aproximação sendo tanto maior quanto mais pequena for a região: por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo tende para π à medida que o triângulo fica cada vez mais pequeno, uma vez que a diferença é dada pela curvatura multiplicada pela área do triângulo. Do mesmo modo, raciocinou Einstein, uma região pequena de um espaço-tempo curvo deve parecer-se aproximadamente com o espaço-tempo plano de Minkowski. Mas isto é exactamente o Princípio da Equivalência: numa pequena região de um referencial em queda livre tudo se passa com se estivéssemos num referencial inercial (é necessário que a região seja pequena para que o campo gravitacional seja aproximadamente uniforme ao longo dessa região; caso contrário, nem todos os corpos cairiam com a mesma aceleração e seria possível inferir a existência de um campo gravitacional). Mais: num destes referenciais em queda livre, um corpo que esteja também em queda livre move-se em linha recta com velocidade constante. Logo, a sua história é uma curva causal de comprimento máximo. Concluímos então que num espaço-tempo curvo as histórias

¹⁸É em parte por isto que durante algum tempo se acreditou que a Terra fosse plana: a região da superfície da Terra que conseguimos avistar é muito pequena quando comparada com o raio da Terra.

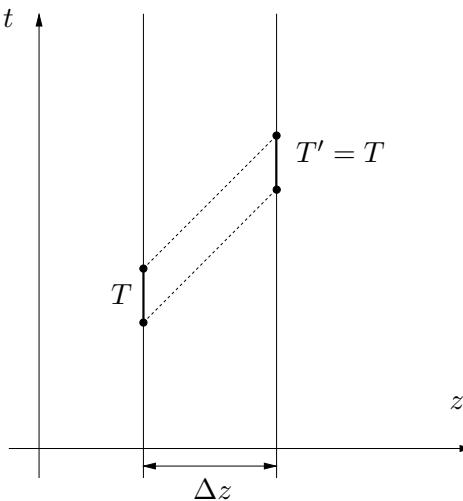


Figura 33: A geometria de Minkowski é incompatível com o desvio gravitacional para o vermelho.

dos corpos em queda livre são curvas causais de comprimento máximo, ou seja, **geodésicas**. Do mesmo modo, num pequeno referencial em queda livre a história de um raio de luz deve ser uma curva causal de comprimento nulo com a propriedade de ser a **única** curva causal que une dois quaisquer dos seus pontos. Concluímos então que num espaço-tempo curvo as histórias de raios de luz são curvas causais deste género, ditas **geodésicas nulas**.

Estas ideias eram já claras para Einstein em 1912. Precisava agora de saber calcular a curvatura do espaço-tempo criada por uma determinada distribuição de matéria. Para isso, Einstein passou os 3 anos seguintes a estudar a matemática dos espaços curvos (com a ajuda do seu amigo matemático Marcel Grossmann¹⁹). Não havia nenhum método que lhe garantisse chegar ao resultado correcto: ele precisava literalmente de **adivinhar** a solução. Depois de muitas tentativas falhadas e becos sem saída, conseguiu finalmente encontrar a equação correcta, em finais de 1915 (Einstein quase foi ultrapassado nesta descoberta pelo famoso matemático Hilbert²⁰, que obteve a mesma equação por um método diferente quase em simultâneo). A **equação de Einstein** é

$$\mathbf{R} = 8\pi \mathbf{T}$$

onde **R** e **T** são objectos matemáticos chamados **tensores**. O tensor **R** chama-se o **tensor de curvatura de Ricci**²¹, e descreve a curvatura do espaço-tempo em cada ponto. O tensor **T** chama-se o **tensor energia-momento reduzido**, e descreve a distribuição de matéria. Portanto a equação de Einstein especifica como é que a matéria curva o espaço-tempo.

5.4 Fórmulas importantes

- Desvio gravitacional para o vermelho:

$$T' = (1 + \Delta\phi)T$$

¹⁹Marcel Grossmann (1878–1936), matemático húngaro

²⁰David Hilbert (1862–1943), matemático alemão.

²¹Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), matemático italiano



Figura 34: Grossmann, Hilbert e Ricci.

- Relação de Planck-Einstein (nos Exercícios):

$$E = \frac{h}{T}$$

5.5 Exercícios

1. Em situações do dia-a-dia, o desvio gravitacional para o vermelho é muito pequeno, pelo que só foi possível confirmar este efeito experimentalmente no início dos anos 60. A primeira experiência foi realizada num poço de elevador de um dos edifícios da Universidade Harvard (EUA), com 23 metros de altura. Calcule a variação percentual do período medida nesta experiência.
2. Por vezes a luz comporta-se como se fosse formada por partículas, chamadas **fotões**, com energia dada pela **relação de Planck-Einstein**

$$E = \frac{h}{T},$$

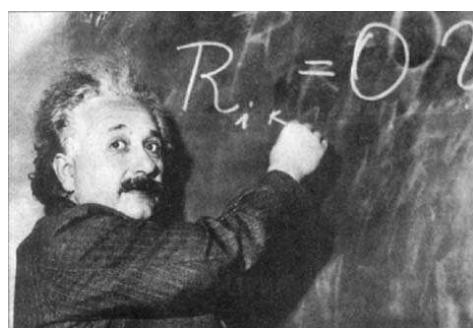


Figura 35: Einstein escrevendo a sua equação para o vácuo ($T = 0$).

onde h é a **constante de Planck** e T é o período da radiação. Da **equação de equivalência massa-energia**

$$E = mc^2$$

(que Einstein deduziu como uma consequência da Relatividade Restrita), é de esperar que um fotão que sobe num campo gravitacional perca uma energia dada por

$$\Delta E = \frac{E}{c^2} \Delta \phi.$$

Mostre que se assim for então a relação de Planck-Einstein implica a fórmula do desvio gravitacional para o vermelho.

3. Corrija o resultado do Exercício 13 da Secção 1 incluindo os efeitos do campo gravitacional. Assuma que o avião voou a uma altitude média de 10 quilómetros.
4. O GPS funciona com base em satélites com órbitas de período 12 horas que transportam relógios atómicos muito precisos. É muito importante que estes relógios estejam sincronizados com os relógios das estações de rastreio à superfície da Terra, uma vez que qualquer dessincronização se reflecte num erro posicional do receptor da mesma ordem de grandeza. Mostre que se não fossem efectuadas correcções relativistas, os relógios dos satélites estariam dessincronizados em relação aos relógios das estações de rastreio no equador em cerca de 12 quilómetros-luz ao fim de um dia de funcionamento.
5. Devido ao seu movimento de rotação, a Terra não é uma esfera perfeita, sendo achataada nos pólos. Deste modo, o potencial gravitacional da Terra é dado por uma expressão mais complicada que simplesmente $\phi = -\frac{M}{r}$ (que é no entanto uma boa aproximação). Na realidade, $\phi - \frac{v^2}{2}$ possui o mesmo valor para todos os pontos à superfície da Terra, onde ϕ é o potencial gravitacional da Terra e v é a velocidade de rotação da superfície da Terra no ponto indicado. Mostre que como consequência desta fórmula todos os relógios à superfície da Terra batem ao mesmo ritmo.

5.6 Soluções

1. A variação percentual foi

$$\frac{T' - T}{T} = \Delta \phi = g \Delta z = \frac{9,8 \times 23}{(3 \times 10^8)^2} \simeq 2,5 \times 10^{-15}.$$

2. Sejam E e T a energia e o período de um fotão num dado ponto P do campo gravitacional, e E' , T' as mesmas quantidades num outro ponto P' . Seja $\Delta \phi$ a diferença de potencial entre P' e P . A relação de Planck-Einstein implica que

$$ET = E'T',$$

e se aceitarmos o argumento no enunciado somos forçados a concluir que

$$E' = E - \frac{E}{c^2} \Delta \phi = \left(1 - \frac{\Delta \phi}{c^2}\right) E.$$

Concluimos assim que

$$T = \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) T',$$

ou, usando o facto de que $\left|\frac{\Delta\phi}{c^2}\right| \ll 1$,

$$T' = \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) T.$$

3. Uma vez que o avião voou a uma altitude média de 10 quilómetros, os relógios a bordo do avião registaram uma duração para o tempo da viagem superior ao relógio em terra por uma fração

$$\Delta\phi = g\Delta z = \frac{9,8 \times 10^4}{(3 \times 10^8)^2} \simeq 1,1 \times 10^{-12}.$$

Uma vez que a viagem demorou cerca de 124000 segundos, isto corresponde a um tempo adicional de cerca de

$$1,1 \times 10^{-12} \times 1,24 \times 10^5 \simeq 1,4 \times 10^{-7} \text{ segundos},$$

ou seja, cerca de 140 nano-segundos (independentemente do sentido do vôo). Deste modo, o relógio que voou para leste atrasou-se na realidade apenas cerca de $170 - 140 = 30$ nano-segundos, enquanto que o relógio que voou para oeste se adiantou cerca de $80 + 140 = 220$ nano-segundos.

4. Se um observador inercial no infinito mede um intervalo de tempo Δt , um satélite que se move com velocidade v num ponto a uma distância r do centro da Terra mede um intervalo de tempo

$$\Delta t_{SAT} = \sqrt{1 - v^2} \left(1 - \frac{M}{r}\right) \Delta t \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) \left(1 - \frac{M}{r}\right) \Delta t \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2} - \frac{M}{r}\right) \Delta t.$$

Do mesmo modo, um observador à superfície da Terra mede um intervalo de tempo

$$\Delta t_{TERRA} \simeq \left(1 - \frac{V^2}{2} - \frac{M}{R}\right) \Delta t,$$

onde V é a velocidade de rotação da Terra e R é o raio da Terra. Portanto

$$\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{TERRA}} = \frac{1 - \frac{v^2}{2} - \frac{M}{r}}{1 - \frac{V^2}{2} - \frac{M}{R}} \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2} - \frac{M}{r}\right) \left(1 + \frac{V^2}{2} + \frac{M}{R}\right) \simeq 1 - \frac{v^2}{2} - \frac{M}{r} + \frac{V^2}{2} + \frac{M}{R}.$$

Vimos já que $r \simeq 27000$ quilómetros, pelo que

$$\frac{M}{r} \simeq \frac{4,5 \times 10^{-6}}{27000} \simeq 1,7 \times 10^{-10}.$$

Por outro lado,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{M}{2r} \simeq 0,8 \times 10^{-10}.$$

Analogamente, dado que $R \simeq 6400$ quilómetros, vem

$$\frac{M}{R} \simeq \frac{4,5 \times 10^{-6}}{6400} \simeq 7,0 \times 10^{-10}.$$

Finalmente, a velocidade de rotação da Terra no equador é de cerca de

$$\frac{2\pi \times 6400}{24 \times 3600} \simeq 0,47 \text{ quilómetros por segundo},$$

pelo que

$$\frac{V^2}{2} \simeq 1,2 \times 10^{-12}.$$

Concluímos portanto que

$$\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{TERRA}} \simeq 1 + 4,5 \times 10^{-10},$$

ou seja, o relógio no satélite adianta-se por dia cerca de $4,5 \times 10^{-10} \times 24 \times 3600 \simeq 4,0 \times 10^{-5}$ segundos por dia, correspondendo a cerca de $4,0 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^5 = 12$ quilómetros-luz.

5. Se um observador inercial no infinito mede um intervalo de tempo Δt , um observador que se move com velocidade v num ponto em que o potencial gravitacional da Terra é ϕ mede um intervalo de tempo

$$\Delta t' = \sqrt{1 - v^2} (1 + \phi) \Delta t \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) (1 + \phi) \Delta t \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2} + \phi\right) \Delta t.$$

Uma vez que $\phi - \frac{v^2}{2}$ é igual para todos os pontos à superfície da Terra, concluimos que todos os relógios à superfície da Terra batem ao mesmo ritmo.

6 A Solução de Schwarzschild

6.1 A solução de Schwarzschild

Em 1916, poucos meses após a publicação da equação de Einstein, Schwarzschild²² (que estava na altura na frente russa) descobriu a solução correspondente ao campo gravitacional criado por um corpo esférico de massa M . Se nos restringirmos apenas a acontecimentos que ocorrem num plano de simetria que passa pelo centro de M , a métrica de Schwarzschild é dada por

$$\Delta\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\Delta r^2 - r^2\Delta\theta^2$$

(onde devemos ter $r > 2M$).



Figura 36: Karl Schwarzschild.

Como podemos interpretar as coordenadas (t, r, θ) ? Começamos por notar que quando $M = 0$ a métrica de Schwarzschild fica

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta r^2 - r^2\Delta\theta^2.$$

Esta não é mais que a métrica de Minkowski escrita em coordenadas polares, uma vez que, como vimos, a métrica do plano Euclidiano se escreve

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2.$$

Isto faz sentido: quando $M = 0$ não existe gravidade e portanto o espaço-tempo deve ser o espaço-tempo plano de Minkowski. Podemos então pensar nas coordenadas (t, r, θ) de Schwarzschild como uma generalização das coordenadas (t, r, θ) de Minkowski.

6.2 Observadores estacionários

As curvas em que as coordenadas r e θ não variam são histórias de observadores em repouso em relação ao corpo esférico M , aos quais chamaremos **observadores estacionários**. Note-se que estas curvas **não são** geodésicas, uma vez que estes observadores não estão em queda

²²Karl Schwarzschild (1873–1916), físico e astrónomo alemão.

livre (se estivessem, a coordenada r deveria diminuir). Na realidade, pode mostrar-se que estes observadores medem um campo gravitacional

$$g = \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}},$$

o que é aproximadamente o resultado Newtoniano para $\frac{M}{r} \ll 1$.

Quando a coordenada t varia de Δt , um observador estacionário mede um intervalo de tempo próprio

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$$

(uma vez que $\Delta r = \Delta\theta = 0$). Note-se que quando r é muito grande se tem $\Delta\tau \simeq \Delta t$. Portanto podemos interpretar a coordenada t como o tempo medido por um observador estacionário muito afastado de M (“no infinito”, como por vezes se diz).

6.3 Desvio para o vermelho

A métrica de Schwarzschild é invariante por translacções no tempo. Quer isto dizer que o intervalo entre dois acontecimentos muito próximos P_1 e P_2 , de coordenadas (t_1, r_1, θ_1) e (t_2, r_2, θ_2) , é igual ao intervalo entre os acontecimentos Q_1 e Q_2 de coordenadas $(t_1 + \Omega, r_1, \theta_1)$ e $(t_2 + \Omega, r_2, \theta_2)$, para qualquer $\Omega \in \mathbb{R}$. Portanto se γ é uma geodésica, isto é, uma curva de comprimento máximo entre dois pontos, a curva γ' obtida a partir de γ movendo todos os seus pontos para os pontos com coordenada t aumentada de Ω é também uma geodésica. O mesmo é verdade se γ é uma geodésica nula.

Consideremos dois observadores estacionários O e O' , de coordenadas radiais r e r' . Suponhamos que O envia um sinal luminoso de período T para O' . A história do raio de luz correspondente ao início do período é uma geodésica nula γ . O raio luminoso correspondente ao fim do período é uma geodésica nula γ' , construída a partir de γ por translacção de Ω na coordenada t (Figura 37). O período T medido por O está relacionado com Ω mediante

$$T = \Omega \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}.$$

Do mesmo modo, o período T' medido por O' satisfaz

$$T' = \Omega \sqrt{1 - \frac{2M}{r'}}.$$

Concluímos que

$$T' = T \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r'}}{1 - \frac{2M}{r}}}.$$

É esta a fórmula do desvio para o vermelho para observadores estacionários na métrica de Schwarzschild. Note-se que se $r' > r$ então $T' > T$, como seria de esperar. Esta afirmação é por vezes resumida dizendo que **a gravidade atrasa o tempo**.

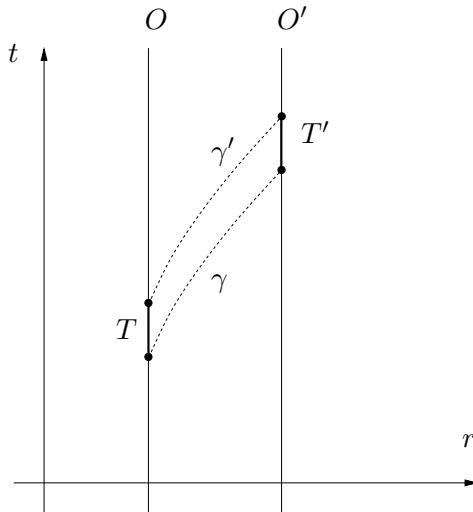


Figura 37: Desvio para o vermelho na geometria de Schwarzschild.

6.4 Curvatura do espaço

Suponhamos que dois observadores estacionários próximos, com coordenadas espaciais (r, θ) e $(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$, pretendem medir a distância que os separa. Para tal, um dos observadores pode medir o tempo que um sinal luminoso demora a atingir o outro observador e regressar; a distância entre eles será **metade** deste tempo ($c = 1$). Um sinal luminoso que se propague entre os dois observadores demora um intervalo de tempo Δt tal que

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Delta r^2 - r^2 \Delta\theta^2 = 0.$$

No entanto, o observador estacionário mede um intervalo de tempo

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2M}{r}},$$

pelo que a distância por ele medida será

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot 2\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Delta r^2 + r^2 \Delta\theta^2},$$

ou seja,

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Delta r^2 + r^2 \Delta\theta^2.$$

Por outras palavras, para os observadores estacionários o plano em que se encontram possui a métrica de uma superfície curva (na realidade, pode mostrar-se que esta é a métrica da superfície na Figura 38). Esta afirmação é por vezes resumida dizendo que **a gravidade curva o espaço**.

6.5 Órbitas

Para calcular as histórias de partículas em queda livre é necessário determinar quais as geodésicas da métrica de Schwarzschild. É possível provar que estas satisfazem as seguintes equações dife-

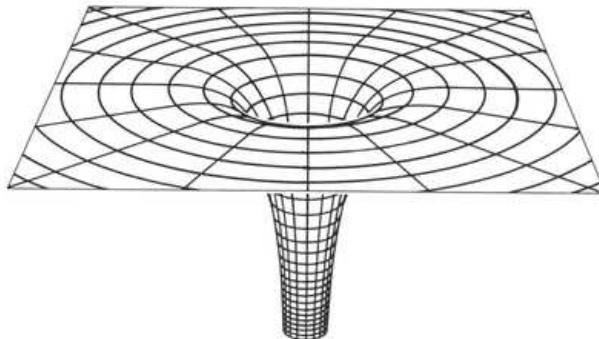


Figura 38: Superfície com a métrica medida pelos observadores estacionários.

enciais:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\theta}{\Delta\tau} &= \frac{L}{r^2}; \\ \frac{\Delta r}{\Delta\tau} &= \pm\sqrt{2E + \frac{2M}{r} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}}; \\ \frac{\Delta t}{\Delta\tau} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\sqrt{1+2E}.\end{aligned}$$

Note-se que as duas primeiras equações são praticamente idênticas às equações Newtonianas, com o tempo próprio τ a desempenhar o papel do tempo. Daí que se os efeitos relativistas são pequenos ($\frac{M}{r} \ll 1$), as trajectórias de partículas em queda livre na métrica de Schwarzschild sejam muito aproximadamente elipses. No entanto, não são elipses exactas: o periélio **precessa** (i.e. roda), a um ritmo de cerca de

$$\frac{6\pi M}{r}$$

radianos por órbita para órbitas quase circulares de raio r .

Na verdade, os periélios das órbitas de todos os planetas do Sistema Solar precessam. Isto não é surpreendente, uma vez que além da força gravitacional do Sol, que é de longe a principal influência, os planetas sentem também a atracção gravitacional uns dos outros. Quando Einstein descobriu a Relatividade Geral, a teoria Newtoniana era capaz de explicar a precessão dos periélios de todos os planetas excepto um: o planeta Mercúrio. A precessão do periélio de Mercúrio é de 5600 segundos de arco por século; a teoria Newtoniana predizia 5557. Havia portanto uma discrepância de 43 segundos de arco por século que ninguém sabia explicar (chegou mesmo a propor-se a existência de um pequeno planeta entre Mercúrio e o Sol, chamado Vulcano, como possível explicação). Quando Einstein calculou a precessão do periélio de Mercúrio devida aos efeitos da Relatividade Geral, obteve, para seu enorme contentamento, exactamente 43 segundos de arco por século.

Usando métodos semelhantes aos usados para a teoria Newtoniana, pode mostrar-se que

existem órbitas circulares de raio $r > 3M$ qualquer. Por coincidência, o resultado Newtoniano

$$\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2 = \frac{M}{r^3}.$$

permanece válido.

6.6 Raios de luz

As histórias dos raios de luz correspondem às geodésicas nulas da métrica de Schwarzschild. Estas satisfazem as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} &= \frac{L}{r^2}; \\ \frac{\Delta r}{\Delta\lambda} &= \pm\sqrt{2E - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}}; \\ \frac{\Delta t}{\Delta\lambda} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\sqrt{2E}.\end{aligned}$$

A variável λ desempenha o mesmo papel que o tempo próprio numa geodésica (recorda que as geodésicas nulas têm comprimento zero). Estas equações podem ser obtidas das equações das geodésicas no limite em que $E \gg 1$. Isto seria de esperar, uma vez que partículas com energias muito elevadas se deslocam a velocidades próximas da velocidade da luz. É no entanto claro que estas **não são** as equações que descrevem uma geodésica nula do espaço-tempo de Minkowski, as quais podem ser obtidas fazendo $M = 0$.

O facto de ser $M > 0$ faz com que $\frac{\Delta t}{\Delta\lambda}$ seja **maior** em relação ao que seria no espaço-tempo de Minkowski. Portanto um raio de luz demora mais tempo t a percorrer um dado trajecto na métrica de Schwarzschild. Este efeito chama-se o **efeito de Shapiro**, e já foi medido experimentalmente em experiências de radar no Sistema Solar.

Por outro lado, $M > 0$ torna o valor absoluto de $\frac{\Delta r}{\Delta\lambda}$ **maior** em relação ao que seria no espaço-tempo de Minkowski. Isso faz com que o raio de luz siga uma trajectória curva, em vez da linha recta que percorreria com $M = 0$. Este efeito chama-se o **efeito de lente gravitacional**, e foi, a par com o desvio gravitacional para o vermelho e a precessão do periélio de Mercúrio, um dos três testes experimentais propostos por Einstein à Relatividade Geral. A confirmação experimental desta previsão, no decorrer de uma expedição inglesa chefiada por Eddington²³ em 1919, tornou Einstein numa celebridade da noite para o dia.

Os astrónomos ingleses tiveram que se deslocar às remotas ilha do Príncipe (na altura colónia portuguesa) e Sobral (Brasil) para fotografarem um eclipse total do Sol. A razão para o fazerem está ilustrada na figura 40: a presença de um corpo de grande massa M curva os raios de luz, o que faz com que as imagens dos objectos apareçam desviadas em relação à posição que ocupariam se M não estivesse presente. Comparando uma fotografia do céu em redor de um objecto de massa elevada com uma fotografia da mesma região numa altura em que o corpo não esteja presente é então possível medir o desvio das imagens das estrelas nessa região devido ao encurvamento dos raios de luz.

²³Sir Arthur Eddington (1882–1944), astrofísico inglês.



Figura 39: Sir Arthur Eddington.

O ângulo de desvio calculado por Einstein foi de

$$\frac{4M}{b},$$

onde b é a distância de maior aproximação do raio de luz ao centro do corpo (para comparação, a gravidade Newtoniana prevê uma deflexão de **metade** deste valor para uma partícula que se mova à velocidade da luz). Este valor é, claro está, muito pequeno em circunstâncias normais. Para um raio de luz a rasar o Sol (que é, de longe, o corpo de maior massa no Sistema Solar), é de apenas 1,75 segundos de arco. Daí a necessidade de usar o Sol para medir o efeito, e consequentemente de fotografar o Sol no decurso de um eclipse total (para que as estrelas fossem visíveis).

A Figura 40 ilustra o caso em que a massa M está directamente entre o observador e a fonte luminosa; nesse caso surgem **duas** imagens, que o observador vê em lados opostos de M . No diagrama de espaço-tempo, isto corresponde a existirem duas geodésicas nulas a unirem os mesmos acontecimentos, o que, como vimos, é um sinal da presença de curvatura.

Um exemplo espectacular destes efeitos é a chamada **cruz de Einstein** (Figura 41). Trata-se de **quatro** imagens do **mesmo** quasar, a uma distância de 8 mil milhões de anos-luz (praticamente na fronteira do Universo observável), rodeando o núcleo de uma galáxia, “apenas” a 500 milhões de anos-luz, que age como uma lente gravitacional²⁴. A razão pela qual se sabe tratarem-se de quatro imagens do mesmo quasar é que todas elas exibem exactamente o mesmo padrão de variações de brilho. Devido ao efeito de Shapiro, no entanto, as variações de brilho das diferentes imagens estão desfasadas de alguns dias.

6.7 Buracos Negros

A métrica de Schwarzschild não faz sentido para $r = 2M$ (chamado o **raio de Schwarzschild**), uma vez que surge uma divisão por zero no coeficiente de Δr^2 . Durante muito tempo, não foi claro que significado devia ser atribuído a este facto.

Na teoria Newtoniana, o raio de Schwarzschild corresponde aos pontos em que a velocidade de escape é a velocidade da luz. Na métrica de Schwarzschild ocorre um fenómeno semelhante: a velocidade de escape para um observador estacionário tende para a velocidade da luz quando r tende para $2M$. Além disso, o desvio para o vermelho e o campo gravitacional medidos por

²⁴Se o alinhamento fosse mais perfeito ver-se-iam **infinitas** imagens, formando o que se chama um **anel de Einstein**.

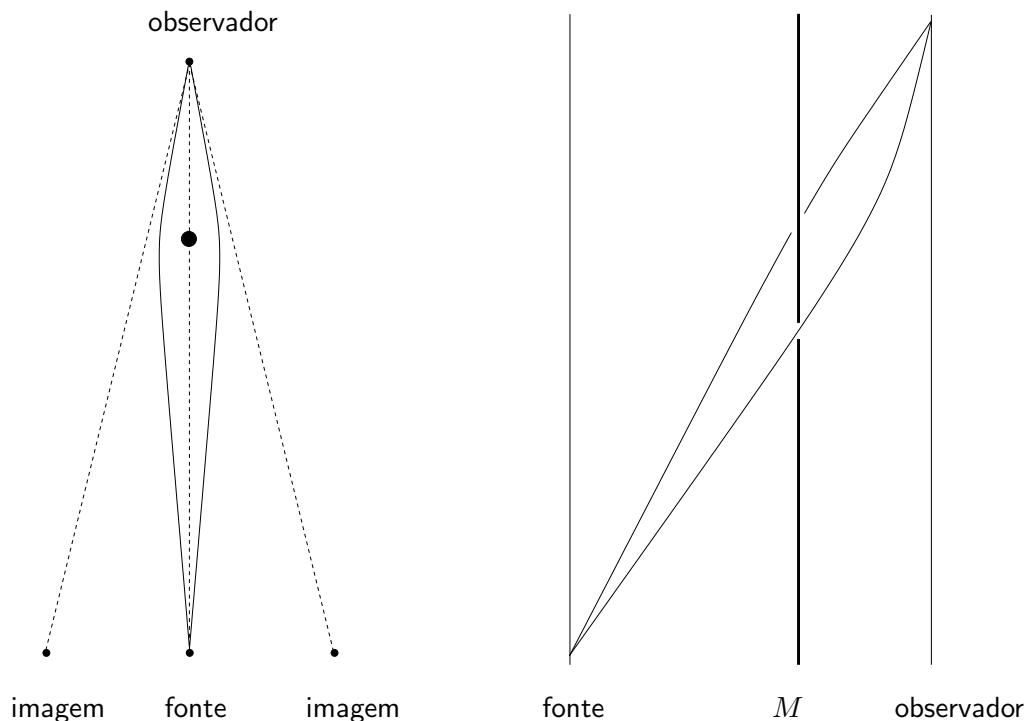


Figura 40: Efeito de lente gravitacional no espaço e no espaço-tempo.

estes observadores tendem para infinito à medida que r se aproxima de $2M$. Por estas razões, pensou-se inicialmente que $r = 2M$ constituía uma singularidade matemática, para além da qual não seria possível prolongar o espaço-tempo de Schwarzschild. No entanto, quando se calculou a curvatura deste espaço-tempo, descobriu-se que esta era dada por

$$\frac{M}{r^3},$$

e que portanto nada de especial parecia acontecer no raio de Schwarzschild.

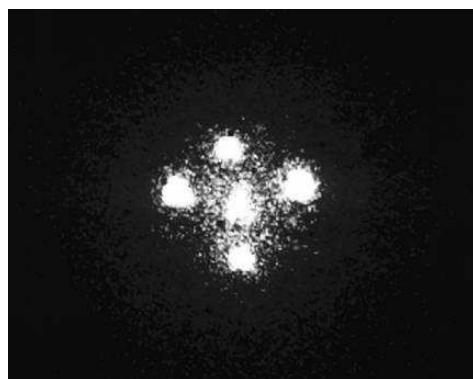


Figura 41: A cruz de Einstein.

Uma situação análoga ocorre no mapa da esfera obtido a partir da projecção cilíndrica: apesar do coeficiente de Δy^2 não fazer sentido para $y = -R$ (pólo sul), nada de especial acontece à curvatura da esfera quando y se aproxima deste valor, mantendo-se constante igual a $\frac{1}{R^2}$. Neste caso, é fácil ver que a esfera não possui qualquer singularidade no pólo sul: acontece apenas que as coordenadas (x, y) associadas à projecção cilíndrica não cobrem adequadamente este ponto. O problema pode ser ultrapassado escolhendo outro sistema de coordenadas (por exemplo, as coordenadas (x, y) associadas à projecção estereográfica).

Um sistema de coordenadas que cobre adequadamente a região $r = 2M$ foi descoberto por Painlevé²⁵ em 1921. Painlevé substituiu a coordenada t de Schwarzschild por uma coordenada t' ²⁶ em termos da qual a métrica se escreve

$$\begin{aligned}\Delta\tau^2 &= \Delta t'^2 - \left(\Delta r + \sqrt{\frac{2M}{r}} \Delta t' \right)^2 - r^2 \Delta\theta^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \Delta t'^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} \Delta t' \Delta r - \Delta r^2 - r^2 \Delta\theta^2.\end{aligned}$$

Note-se que nestas coordenadas não existe nenhum problema em $r = 2M$. No entanto, o coeficiente de $\Delta t'^2$ anula-se no raio de Schwarzschild. Isto significa que as linhas em que $r = 2M$ e θ é constante são **geodésica nulas**. Não admira portanto que não possam existir observadores estacionários em $r = 2M$ (teriam que se estar a mover à velocidade da luz). Do mesmo modo, não podem existir observadores estacionários para $r < 2M$, uma vez que corresponderiam a curvas não causais (teriam que se estar a mover a velocidades superiores à da luz).

Estes factos podem ser compreendidos geometricamente representando os cones de luz num diagrama de espaço-tempo (Figura 42). Estes são dados em cada ponto de coordenadas (t', r) por

$$\Delta\tau^2 = 0 \Leftrightarrow \pm\Delta t' = \Delta r + \sqrt{\frac{2M}{r}} \Delta t' \Leftrightarrow \frac{\Delta r}{\Delta t'} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}.$$

Para $r \gg 2M$, os cones de luz aproximam-se dos cones de luz do espaço-tempo de Minkowski, com declives ± 1 , correspondentes a raios de luz que se afastam ou aproximam de $r = 0$. À medida que r diminui, no entanto, os cones inclinam-se na direcção de $r = 0$. No raio de Schwarzschild, os cones de luz estão tão inclinados que o raio de luz que se “afasta” de $r = 0$ na verdade não o consegue fazer, estando preso no raio de Schwarzschild. Para $r < 2M$ a situação é ainda mais dramática: o raio de luz que se “afasta” de $r = 0$ na verdade está a aproximar-se. Logo, qualquer partícula que entre na região $r < 2M$ não só não consegue voltar a sair, como é forçada a mover-se na direcção de $r = 0$.

Concluímos que observadores no infinito não poderão nunca ver nenhum acontecimento na região $r \leq 2M$; esta região diz-se então um **buraco negro**. A superfície $r = 2M$, que delimita esta região, chama-se o **horizonte** (porque não é possível ver para além dela). Finalmente, a linha $r = 0$ diz-se a **singularidade**. Trata-se de facto de uma singularidade matemática, para além da qual não é possível continuar o espaço-tempo de Schwarzschild, uma vez que a curvatura se torna infinitamente grande.

Fisicamente, a curvatura de um espaço-tempo mede a chamada **força de maré**, que resulta

²⁵Paul Painlevé (1863–1933), matemático francês

²⁶Esta coordenada é o tempo medido pela família dos observadores que caem radialmente a partir do infinito, devidamente sincronizados.

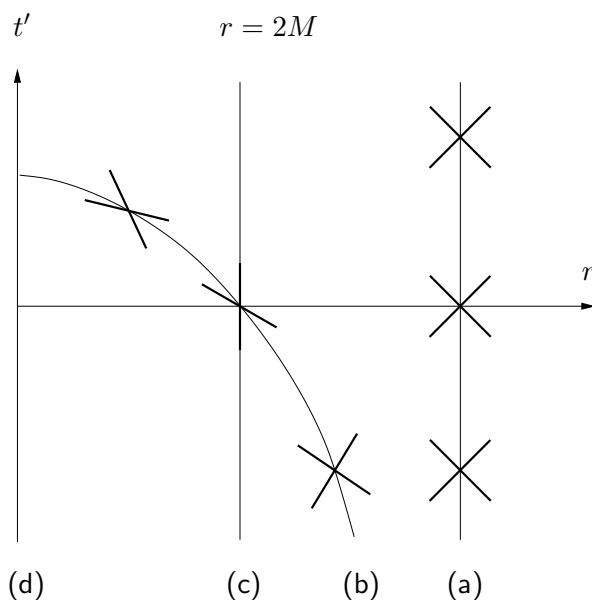


Figura 42: Diagrama do espaço-tempo de Schwarzschild contendo as histórias de: (a) Um observador estacionário; (b) Uma partícula que cai através do horizonte; (c) O horizonte; (d) A singularidade.

da não-uniformidade do campo gravitacional²⁷. Consideremos, por exemplo, um astronauta em órbita, orientado de cabeça para baixo. Então a força exercida pelo campo gravitacional da Terra sobre a sua cabeça é um pouco maior que a força sobre os seus pés. Portanto existe uma força residual (a força de maré) que tende a esticá-lo no sentido do comprimento. Na singularidade no interior de um buraco negro, esta força torna-se infinita, e portanto qualquer objecto que caia num buraco negro acaba por ser destruído.

Corpos esféricos vulgares (estrelas, planetas, berlindes) possuem raios muito superiores ao seu raio de Schwarzschild. Sabe-se no entanto que estrelas com mais de 3 vezes a massa do Sol formam buracos negros no final do seu processo de evolução. Um exemplo famoso é o buraco negro **Cisne X-1**, com cerca de 10 massas solares, a 8000 anos-luz da Terra.

Além dos buracos negros de massas comparáveis à do Sol, resultantes da evolução estelar, sabe-se agora que em geral existem buracos negros supermassivos no centro da maioria das galáxias. O buraco negro no centro da nossa galáxia (Via Láctea) chama-se **Sagitário A***, possui cerca de 2,6 milhões de massas solares e encontra-se a cerca de 28000 anos-luz da Terra.

Uma vez que os buracos negros não emitem luz, não podem ser observados directamente. O que é de facto observado na Terra são as ondas de rádio e os raios-X emitidos por matéria que cai no seu interior (Figura 43).

²⁷Recorde-se que a não-uniformidade de um campo gravitacional é aquilo que impede um referencial em queda livre de ser globalmente equivalente a um referencial inercial.

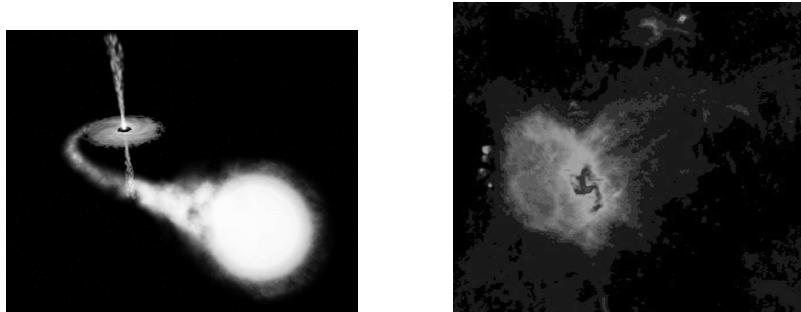


Figura 43: Cisne X-1 (concepção artística) e Sagitário A* (mapa de rádio).

6.8 Fórmulas importantes

- Métrica de Schwarzschild:

$$\Delta\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\Delta r^2 - r^2\Delta\theta^2$$

- Aceleração da gravidade medida por um observador estacionário:

$$g = \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

- Tempo próprio de um observador estacionário:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$$

- Desvio para o vermelho:

$$T' = T \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r'}}{1 - \frac{2M}{r}}}$$

- Distância medida por um observador estacionário:

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2$$

- Precessão do periélio:

$$\frac{6\pi M}{r} \text{ radianos por órbita}$$

- Órbitas circulares:

$$\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2 = \frac{M}{r^3}$$

- Velocidade de escape medida por um observador estacionário (nos Exercícios):

$$v = \sqrt{\frac{2M}{r}}$$

- Deflexão de um raio luminoso:

$$\frac{4M}{b} \text{ radianos}$$

- Curvatura do espaço-tempo de Schwarzschild (intensidade das forças de maré):

$$\frac{M}{r^3}$$

6.9 Exercícios

1. Mostre que se $\frac{M}{r}, \frac{M}{r'} \ll 1$ então a fórmula do desvio gravitacional para o vermelho da métrica de Schwarzschild se reduz à fórmula aproximada

$$T' = (1 + \Delta\phi)T.$$

2. Verifique que a precessão do periélio da órbita de Mercúrio devida a efeitos de Relatividade Geral é de cerca de 43 segundos de arco por século. (Distância de Mercúrio ao Sol: cerca de 3,1 minutos-luz). Qual a precessão do periélio da órbita da Terra devida a estes efeitos?
3. Calcule o período de uma órbita circular de raio $r > 3M$:
 - (a) Para um observador no infinito.
 - (b) Do ponto de vista de um observador estacionário. Qual é a velocidade orbital medida por estes observadores? O que acontece quando r tende para $3M$?
 - (c) Medido por um observador em órbita. O que acontece quando r tende para $3M$?
 - (d) Como é possível que os observadores em órbita, que estão em queda livre, meçam um período menor que os observadores estacionários?
4. (a) Mostre que o facto de que a soma dos ângulos internos de um triângulo Euclidiano ser π é equivalente à afirmação de que os ângulos α , β e γ da Figura 44 satisfazem $\alpha + \beta = \gamma$.
- (b) O **ângulo** entre duas curvas causais é, para velocidades muito inferiores à velocidade da luz, a velocidade relativa dos correspondentes observadores. Mostre que a relação acima continua a ser válida na geometria de Minkowski.
- (c) Duas órbitas circulares com o mesmo raio r , percorridas em sentidos contrários, formam um polígono só com dois lados na geometria de Schwarzschild. Aproximando a área do polígono pela área do cilindro de raio r e altura igual ao período da órbita²⁸, estime a curvatura da solução de Schwarzschild para $\frac{M}{r} \ll 1$.

²⁸Note que o mapa correspondente às coordenadas de Schwarzschild preserva áreas.

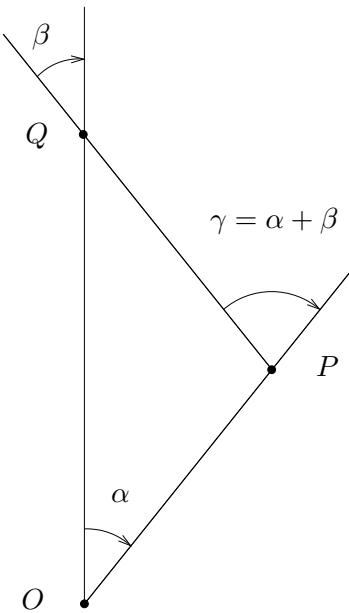


Figura 44: A soma dos ângulos internos de um triângulo Euclidiano é π .

5. (a) Qual é a velocidade de escape para um observador estacionário? O que acontece quando r tende para $2M$?
 (b) Para que valor de r esta velocidade é igual à velocidade da órbita circular? Qual é a velocidade desta órbita?
6. Uma **estrela de neutrões**²⁹ típica tem uma massa 1,4 vezes superior à do Sol comprimida numa esfera com 10 quilómetros de raio.
 (a) Calcule a velocidade de escape para um observador estacionário na superfície da estrela de neutrões.
 (b) A quantas gravidades terrestres equivale o campo gravitacional medido por este observador?
7. Mostre que o desvio sofrido por um raio de luz que passe a rasar o Sol é de 1,75 segundos de arco. (Raio do Sol: 2,3 segundos-luz).
8. Desenhe um diagrama de espaço-tempo que descreva a observação da Cruz de Einstein a partir da Terra num dado instante.
9. No decurso de uma emocionante batalha espacial, *Enterprise* e uma nave militar Klingon caem para a mesma órbita circular em torno de um buraco negro, em posições diametralmente opostas (Figura 46). Para onde deve o Capitão Kirk apontar os seus *lasers*?

²⁹A maior parte das estrelas de neutrões rodam, de modo que a sua emissão de rádio é modulada num sinal periódico com período igual ao período de rotação. Estas estrelas de neutrões chamam-se **pulsares**.

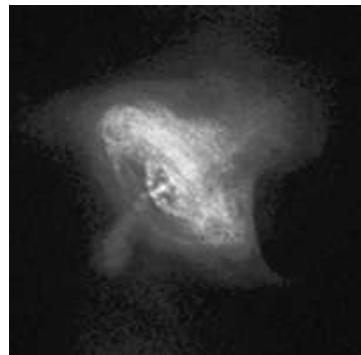


Figura 45: Imagem de raios-X do pulsar no centro da Nebulosa do Caranguejo, a cerca de 6000 anos-luz da Terra.

10. Mostre que os observadores que nas coordenadas de Painlevé satisfazem

$$\frac{\Delta r}{\Delta t'} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta \theta}{\Delta t'} = 0$$

estão em queda livre, e que t' é o seu tempo próprio.

11. Uma partícula que cai num buraco negro é observada por um observador estacionário no infinito. O que é que este vê?
12. (a) O que é que causa as marés? Quantas marés altas existem por dia?
 (b) Sabendo que a Lua provoca marés com cerca do dobro do tamanho das provocadas pelo Sol, calcule a massa aproximada da Lua.
13. Calcule o raio do horizonte do Sagitário A* em segundos-luz e em raios solares.

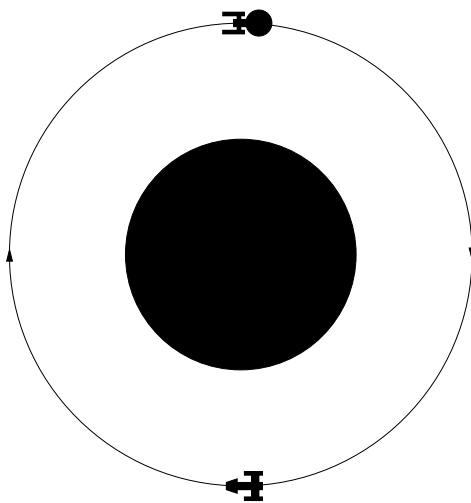


Figura 46: Para onde deve o Capitão Kirk apontar os seus *lasers*?

14. Calcule, em gravidades terrestres por metro, as forças de maré no horizonte

- (a) Do Cisne X-1.
- (b) Do Sagitário A*.

6.10 Soluções

1. Se $\frac{M}{r}, \frac{M}{r'} \ll 1$ então

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r'}}{1 - \frac{2M}{r}}} \simeq \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r'}\right)\left(1 + \frac{2M}{r}\right)} \simeq \sqrt{1 - \frac{2M}{r'} + \frac{2M}{r}} \simeq 1 - \frac{M}{r'} + \frac{M}{r} = 1 + \phi' - \phi,$$

onde ϕ e ϕ' são os potenciais gravitacionais nos pontos de coordenadas r e r' . Consequentemente,

$$T' = T \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r'}}{1 - \frac{2M}{r}}} \simeq (1 + \Delta\phi)T.$$

2. O período T de uma órbita circular de raio r é dado por

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{M}{r}} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{M}}.$$

Portanto o período da órbita de Mercúrio é cerca

$$\sqrt{\left(\frac{3,1}{8,3}\right)^3} \simeq 0,23 \text{ anos.}$$

A precessão do periélio de Mercúrio é de aproximadamente

$$\frac{6\pi \times 1,5}{3,1 \times 60 \times 300000}$$

radianos por órbita, ou seja, cerca de

$$\frac{6\pi \times 1,5}{3,1 \times 60 \times 300000} \times \frac{180}{\pi} \times 3600 \times \frac{100}{0,23} \simeq 45$$

segundos de arco por século (a diferença para o valor exacto de 43 segundos de arco por século deve-se às aproximações).

A precessão do periélio da Terra é de aproximadamente

$$\frac{6\pi \times 1,5}{8,3 \times 60 \times 300000}$$

radianos por órbita, ou seja, cerca de

$$\frac{6\pi \times 1,5}{8,3 \times 60 \times 300000} \times \frac{180}{\pi} \times 3600 \times 100 \simeq 4$$

segundos de arco por século.

3. (a) Uma vez que as órbitas circulares satisfazem

$$\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2 = \frac{M}{r^3} \Leftrightarrow \Delta t = \pm \Delta\theta \sqrt{\frac{r^3}{M}},$$

vemos que o período da órbita para um observador no infinito (i.e. o valor de Δt quando $\Delta\theta = \pm 2\pi$) é

$$T_\infty = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{M}}.$$

- (b) Do ponto de vista de um observador estacionário, o período é

$$T_E = T_\infty \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{M}} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}.$$

A velocidade orbital medida por estes observadores é portanto

$$v = \frac{2\pi r}{T_E} = \frac{\sqrt{\frac{M}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}.$$

Quando r tende para $3M$, este valor aproxima-se de

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}}} = 1,$$

i.e. da velocidade da luz. Existem de facto geodésicas nulas correspondentes a raios de luz que descrevem órbitas circulares de raio $r = 3M$.

- (c) Um observador em órbita satisfaz $\Delta r = 0$ e

$$\Delta\theta^2 = \frac{M}{r^3} \Delta t^2,$$

e portanto mede um tempo próprio $\Delta\tau$ dado por

$$\begin{aligned} \Delta\tau^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Delta r^2 - r^2 \Delta\theta^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \frac{M}{r} \Delta t^2 \\ &= \left(1 - \frac{3M}{r}\right) \Delta t^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}.$$

Consequentemente, o período da órbita para um observador em órbita é

$$T_O = T_\infty \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{M}} \sqrt{1 - \frac{3M}{r}}.$$

Note-se que T_O tende para zero quando r tende para $3M$. Isto seria de esperar, uma vez que neste caso a velocidade do observador em órbita se aproxima da velocidade da luz.

- (d) Geometricamente, o período medido pelo observador em órbita é o comprimento da geodésica que representa uma órbita completa, enquanto que o período medido pelo observador estacionário é o comprimento de uma curva que une os mesmos acontecimentos mas que não é uma geodésica (porque o observador estacionário não está em queda livre). Portanto a geodésica correspondente à órbita circular não tem comprimento máximo. Este fenómeno deve-se ao facto do espaço-tempo de Schwarzschild ser curvo. Por analogia, entre dois pontos não antípodas da esfera existe sempre um arco de geodésica de comprimento mínimo e um arco de geodésica de comprimento não mínimo (que completa o círculo máximo definido pelos dois pontos). Para os dois acontecimentos unidos pela órbita circular, a geodésica maximizante é a que descreve uma partícula atirada para cima (i.e. na direcção radial) com a velocidade necessária para atingir a altura máxima ao fim de meia órbita, tornando a passar pelo ponto de onde foi lançada ao fim de uma órbita.
4. (a) Os ângulos internos do triângulo são α , β e $\pi - \gamma$. Portanto devemos ter

$$\alpha + \beta + \pi - \gamma = \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \gamma.$$

- (b) Nesta interpretação, α é a velocidade de OP em relação a OQ , β é a velocidade de OQ em relação a PQ e γ é a velocidade de OP em relação a PQ . Como as velocidades são muito inferiores à da luz, temos então $\gamma = \alpha + \beta$.
- (c) Para $\frac{M}{r} \ll 1$, a velocidade de cada uma das órbitas circulares é aproximadamente

$$v = \sqrt{\frac{M}{r}}.$$

Cada um dos ângulos do polígono é aproximadamente $2v$, e a soma dos ângulos internos do polígono é aproximadamente $4v$. A área do cilindro de raio r e altura igual ao período da órbita é aproximadamente

$$A = 2\pi r \times \frac{2\pi r}{v} = \frac{4\pi^2 r^2}{v}.$$

Portanto a curvatura da solução de Schwarzschild para $\frac{M}{r} \ll 1$ será da ordem de

$$\frac{4v}{A} = \frac{4v^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{M}{\pi^2 r^3}.$$

5. (a) Uma partícula lançada na direcção radial possui momento angular

$$L = r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta\tau} = 0,$$

pelo que as equações diferenciais que descrevem o seu movimento são

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r}{\Delta\tau} &= \pm \sqrt{2E + \frac{2M}{r}}; \\ \frac{\Delta t}{\Delta\tau} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \sqrt{1 + 2E}. \end{aligned}$$

A primeira equação implica que

$$2E + \frac{2M}{r} \geq 0 \Leftrightarrow -Er \leq M.$$

Vemos então que se $E < 0$ a coordenada r é limitada. Portanto a velocidade de escape corresponde a $E = 0$. As equações acima implicam então que

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2M}{r}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right).$$

A distância medida por um observador estacionário é

$$\Delta s = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \Delta r,$$

e o tempo próprio deste observador é

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}.$$

Consequentemente, a velocidade de escape medida por um observador estacionário é

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2M}{r}}$$

(que por coincidência é o resultado Newtoniano). Note-se que quando r tende para $2M$ a velocidade de escape aproxima-se de 1 (i.e. da velocidade da luz).

- (b) Recorde-se do Exercício 3 que a velocidade orbital para um observador estacionário é

$$v = \frac{\sqrt{\frac{M}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}.$$

Esta velocidade é igual à velocidade de escape para

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} = \sqrt{\frac{2M}{r}} \Leftrightarrow \frac{M}{r} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2M}{r} \Leftrightarrow 1 = 2 - \frac{4M}{r} \Leftrightarrow r = 4M.$$

Esta órbita, como todas as órbitas circulares de raio inferior a $6M$, é instável, e pode ser atingida por uma partícula deixada cair do infinito com momento angular apropriado.

6. (a) A velocidade de escape para um observador estacionário na superfície da estrela de neutrões será

$$v \simeq \sqrt{\frac{2 \times 1,4 \times 1,5}{10}} \simeq 0,65$$

(i.e. cerca de 65% da velocidade da luz).

- (b) Usando quilómetros como unidades, o campo gravitacional medido pelo observador estacionário na superfície da estrela de neutrões é

$$g = \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \simeq \frac{\frac{1,4 \times 1,5}{10^2}}{\sqrt{1 - \frac{2 \times 1,4 \times 1,5}{10}}} \simeq 2,8 \times 10^{-2}.$$

Nas mesmas unidades, a aceleração gravitacional à superfície da Terra é

$$g = \frac{M}{r^2} \simeq \frac{4,5 \times 10^{-6}}{6400^2} \simeq 1,1 \times 10^{-13}.$$

Consequentemente, o campo gravitacional medido pelo observador estacionário na superfície da estrela de neutrões equivale a cerca de

$$\frac{2,8 \times 10^{-2}}{1,1 \times 10^{-13}} \simeq 2,5 \times 10^{11}$$

gravidades terrestres.

7. Usando quilómetros como unidades, vemos que o desvio sofrido por um raio de luz que passe a rasar o Sol é de cerca de

$$\frac{4 \times 1,5}{2,3 \times 300000} \times \frac{180}{\pi} \times 3600 \simeq 1,8 \text{ segundos de arco}$$

(a diferença para o valor exacto de 1,75 segundos de arco deve-se às aproximações).

8. O diagrama de espaço-tempo que descreve a observação da Cruz de Einstein a partir da Terra num dado instante encontra-se representado na Figura 47. Existem quatro geodésicas nulas unindo a história do quasar ao acontecimento em que este é observado na Terra. Em geral, os raios de luz correspondentes a estas geodésicas foram emitidos em instantes diferentes.
9. Existem dois factores a complicar a pontaria ao Capitão Kirk: a deflexão da luz pelo buraco negro, que faz com que o seu raio *laser* siga uma trajectória curva, e o facto da luz se propagar com uma velocidade finita, que obriga o Capitão Kirk a apontar não para a posição actual da nave Klingon, mas sim para onde ela irá estar quando o raio *laser* a atingir. No entanto, os mesmos factores actuam sobre a luz que a *Enterprise* recebe da nave Klingon. Por simetria, é então claro que o Capitão Kirk deve apontar os seus *lasers* segundo o ângulo em que vê a nave Klingon, mas na direcção oposta, ou seja, na direcção que a luz proveniente da nave Klingon tomaria se fosse reflectida pela *Enterprise* (figura 48).
10. Nas coordenadas de Painlevé temos

$$\Delta\tau = \Delta t' \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta r}{\Delta t'} + \sqrt{\frac{2M}{r}} \right)^2 - r^2 \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t'} \right)^2},$$

pelo que para os observadores que satisfazem

$$\frac{\Delta r}{\Delta t'} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t'} = 0$$

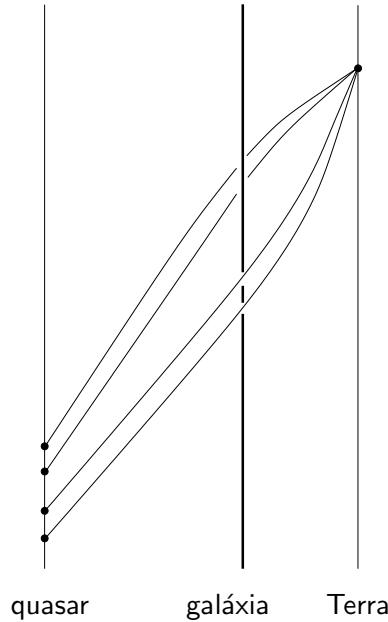


Figura 47: Diagrama para a observação da Cruz de Einstein a partir da Terra.

se tem $\Delta\tau = \Delta t'$. Sejam P e Q dois acontecimentos quaisquer na história γ de um destes observadores, para os quais a coordenada t' vale t'_P e t'_Q , respectivamente. Então o comprimento de γ entre P e Q é $t'_Q - t'_P$. Para qualquer outra curva causal γ' entre os mesmos acontecimentos temos obviamente $\Delta\tau \leq \Delta t'$, pelo que o comprimento de γ' é menor ou igual a $t'_Q - t'_P$. Concluímos que γ é uma curva causal de comprimento máximo, isto é, uma geodésica. Portanto γ é a história de um observador em queda livre.

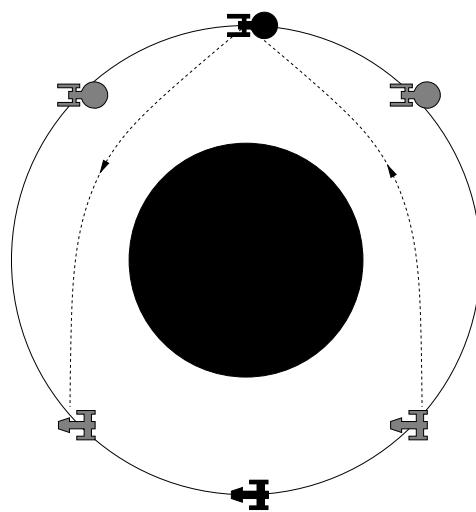


Figura 48: O Capitão Kirk deve apontar os seus *lasers* segundo o ângulo em que vê a nave Klingon.

11. A luz recebida pelo observador no infinito corresponde às geodésicas nulas que se afastam do horizonte. Estas geodésicas não podem atravessar o horizonte, e portanto acumulam-se ao longo deste, como se mostra na Figura 49. Consequentemente, todas elas intersectam a história da partícula em queda. Isto significa que o observador no infinito nunca deixa de ver a partícula, apesar de a ver mover-se cada vez mais devagar, como que suspensa no limiar do horizonte, cada vez mais desviada para o vermelho.

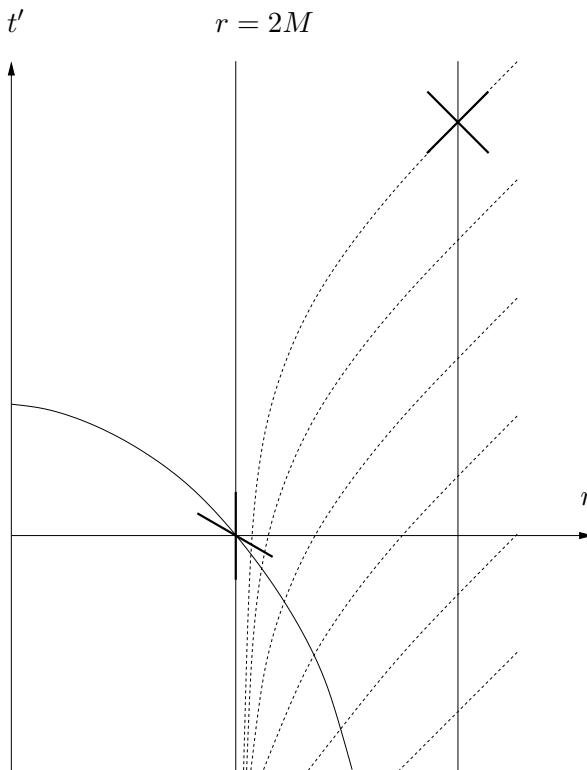


Figura 49: Observador estacionário observando uma partícula que cai através do horizonte.

12. (a) A Terra está em queda livre no campo gravitacional da Lua. Mas a Terra possui dimensões não desprezáveis. Portanto na realidade é o centro da Terra está em queda livre. As zonas da Terra mais próximas da Lua estão a ser atraídas com mais intensidade que o centro da Terra, e as zonas mais afastadas com menos intensidade. Isto dá origem a uma força residual que tende a esticar a Terra ao longo do eixo que une à Lua. Como os oceanos são mais maleáveis que a crosta terrestre, evidenciam uma deformação mais pronunciada: o seu nível é mais alto ao longo do eixo que une a Terra à Lua. À medida que a Terra roda, estas duas zonas de nível mais alto vão-se deslocando ao longo da superfície da Terra. Portanto existem duas marés altas por dia. O Sol também dá origem a marés, se bem que mais baixas. A posição relativa do Sol e da Lua determina a intensidade das marés: estas são mais altas quando o Sol e a Lua estão alinhados.

- (b) Seja m a massa da Lua e M a massa do Sol. Temos então

$$\frac{m}{1,3^3} = 2 \times \frac{M}{(8,3 \times 60)^3} \Leftrightarrow m \simeq 3,6 \times 10^{-8} \times M \simeq 5,3 \times 10^{-5} \text{ metros.}$$

Portanto a Terra é cerca de $\frac{4,5 \times 10^{-3}}{5,4 \times 10^{-5}} \simeq 83$ vezes mais pesada que a Lua.

13. Uma vez que a massa do Sagitário A* é de cerca de 2,6 milhões de massas solares, o raio do seu horizonte é de cerca de

$$2 \times 2,6 \times 10^6 \times 1,5 = 2,6 \times 3 \times 10^6 \text{ quilómetros,}$$

ou seja, cerca de 26 segundos-luz, o que corresponde a aproximadamente $\frac{26}{2,3} \simeq 11$ raios solares.

14. (a) Usando metros como unidade, a aceleração da gravidade à superfície da Terra é

$$g = \frac{4,5 \times 10^{-3}}{(6,4 \times 10^6)^2}.$$

Deste modo, as forças de maré no horizonte do Cisne X-1 são de aproximadamente

$$\frac{10 \times 1,5 \times 10^3}{(2 \times 10 \times 1,5 \times 10^3)^3} \times \frac{(6,4 \times 10^6)^2}{4,5 \times 10^{-3}} \simeq 5,1 \times 10^6 \text{ gravidades por metro.}$$

Portanto um astronauta em queda para este buraco negro seria esmagado muito antes de alcançar o horizonte.

- (b) Do mesmo modo, as forças de maré no horizonte do Sagitário A* são de aproximadamente

$$\frac{2,6 \times 10^6 \times 1,5 \times 10^3}{(2 \times 2,6 \times 10^6 \times 1,5 \times 10^3)^3} \times \frac{(6,4 \times 10^6)^2}{4,5 \times 10^{-3}} \simeq 7,5 \times 10^{-5} \text{ gravidades por metro.}$$

Portanto um astronauta em queda para este buraco negro mal notaria as forças de maré ao atravessar o horizonte.

7 Cosmologia

7.1 Desvio para o vermelho

Consideremos um sinal luminoso emitido com período T . Se o período medido por um dado observador é T' , diz-se que o sinal sofreu um **desvio para o vermelho** de

$$z = \frac{T' - T}{T} = \frac{T'}{T} - 1.$$

Equivalentemente,

$$T' = T(1 + z).$$

No Exercício 5 da Secção 2 vimos que, na ausência de gravidade e para velocidades pouco elevadas (relativamente à velocidade da luz), o desvio para o vermelho z coincide exactamente com a velocidade v com que a fonte do sinal se afasta. Na Secção 5 vimos também que observadores estacionários em campos gravitacionais fracos medem um devio para o vermelho de $z = \Delta\phi$, onde $\Delta\phi$ é a diferença de potencial gravitacional entre o observador e a fonte.

Os átomos de um dado elemento (por exemplo hidrogénio) só absorvem radiação com certos períodos bem definidos. Após atravessar uma quantidade apreciável de átomos desse elemento, o espectro da luz branca apresenta uma série de riscas de absorção, que constituem a assinatura do elemento. Quando a luz é recebida na Terra, estas riscas estão em geral deslocadas em relação às suas posições habituais; medindo o deslocamento obtém-se o desvio para o vermelho e, consequentemente, a velocidade dos átomos. É assim que os astrónomos conseguem medir a velocidade com que uma determinada estrela se afasta da Terra. (Há também um pequeno desvio devido à gravidade da estrela, mas é muito inferior ao efeito devido à velocidade).

7.2 Lei de Hubble

A existência de outras galáxias para além da Via Láctea só foi estabelecida em 1924 por Hubble³⁰. Na sequência do seu trabalho, Hubble mediou cuidadosamente o desvio para o vermelho de várias dezenas de galáxias, e não só descobriu que a maior parte delas se estão a afastar da Terra como ainda que quanto mais distante se encontra uma galáxia maior é a velocidade com que se afasta. Em 1929 Hubble formulou aquilo a que hoje se chama a **lei de Hubble**: $v = Hd$, onde v é a velocidade com que uma dada galáxia se afasta, d é a sua distância à Terra e H é uma constante, dita a **constante de Hubble**, cujo valor moderno é de aproximadamente 70 quilómetros por segundo por megaparsec (um **parsec** é uma unidade de comprimento, aproximadamente igual a 3,26 anos-luz; um **megaparsec** é igual a um milhão de parsecs). Por outras palavras, uma galáxia a 1 megaparsec da Terra afasta-se em média a uma velocidade de 70 quilómetros por segundo. Para comparação, o diâmetro da Via Láctea é de cerca de 0,03 megaparsecs, as galáxias de Andrómeda e do Triângulo (que juntamente com a Via Láctea constituem as galáxias mais importantes do chamado Grupo Local) encontram-se a cerca de 0,8 megaparsecs, e o raio de Universo observável é de cerca de 15000 megaparsecs.

7.3 Modelos FLRW

O primeiro modelo de um espaço-tempo descrevendo o Universo a larga escala (dito um **modelo cosmológico**) foi proposto por Einstein em 1917. Einstein partiu da hipótese de que o Universo

³⁰Edwin Hubble (1889–1953), astrónomo americano.



Figura 50: Edwin Hubble.

seria uma hiperesfera, ou seja, o análogo tridimensional da superfície de uma esfera (por razões filosóficas, agradava-lhe a ideia do espaço ser limitado mas não ter fronteira). Introduzindo esta hipótese na sua equação, Einstein descobriu que, como esperava, a densidade deste Universo teria que ser constante. Isto não é desrazoável: apesar de à nossa escala o Universo não ser homogéneo, uma vez que a matéria se aglomera em estrelas e estas em galáxias, a escalas maiores estes pormenores finos são ignoráveis. Para sua surpresa, no entanto, Einstein descobriu que um tal Universo não se manteria estático: o seu raio tenderia a diminuir até a hiperesfera colapsar num ponto. Para manter o seu Universo estático, Einstein foi forçado a introduzir uma **constante cosmológica** (por vezes também chamada **energia escura**), representando a energia do vácuo, cujo efeito gravitacional seria o de uma força repulsiva. Mais tarde, quando a expansão do Universo foi descoberta (mostrando assim que o Universo não é estático), Einstein considerou a introdução deste termo “o maior disparate da sua vida”. Em 1998, porém, surgiram provas irrefutáveis de que a constante cosmológica de facto existe.



Figura 51: de Sitter, Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker.

Ainda em 1917, de Sitter³¹ apresentou um outro modelo cosmológico, representando um Universo hiperesférico sem matéria mas com uma constante cosmológica positiva. Na realidade, tanto o Universo de Einstein como o de de Sitter são casos particulares dos modelos gerais descobertos por Friedmann³² em 1922, e redescobertos por Lemaître³³ em 1927, e por Robertson³⁴ e Walker³⁵ em 1929. Os modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) assumem

³¹Willem de Sitter (1872–1934), matemático, físico e astrónomo holandês.

³²Alexander Friedmann (1888–1925), matemático russo.

³³Georges-Henri Lemaître (1894–1966), astrónomo e padre católico belga.

³⁴Howard Robertson (1903–1961), matemático e físico americano

³⁵Arthur Walker (1909–2001), matemático inglês.

apenas que o Universo a larga escala é **homogéneo** (i.e. igual em todos os pontos) e **isotrópico** (i.e. igual em todas as direcções); tais hipóteses foram espectacularmente confirmadas em 1964, com a descoberta da **radiação cósmica de fundo**, por Penzias³⁶ e Wilson³⁷. Esta radiação, prevista em 1948 por Alpher³⁸, Gamow³⁹ e Herman⁴⁰, consiste em fotões de microondas (cerca de 400 por centímetro cúbico) que se pensa terem tido origem no Universo primitivo, e cujas características são rigorosamente iguais, independentemente da direcção de onde vêm.



Figura 52: Alpher, Gamow, Herman, Penzias e Wilson.

Só existem 3 tipos de espaços que são homogéneos e isotrópicos: a hiperesfera, o espaço Euclidiano usual (no qual vale o Teorema de Pitágoras) e o espaço hiperbólico. O espaço hiperbólico possui curvatura constante negativa, sendo uma espécie de oposto da hiperesfera: a soma dos ângulos internos de um triângulo neste espaço é sempre **inferior** a 180° . Por analogia com a hiperesfera, define-se raio do espaço hiperbólico como sendo o número R tal que a sua curvatura é $-\frac{1}{R^2}$.

Uma vez que os modelos FLRW exigem que o espaço seja a hiperesfera, o espaço Euclidiano ou o espaço hiperbólico, a única coisa que pode variar é o raio R do Universo. Assim, e restringindo-nos, como habitualmente, a duas dimensões espaciais, a métrica dos modelos FLRW é dada por

$$\begin{aligned}\Delta\tau^2 &= \Delta t^2 - R(t)^2 (\Delta\theta^2 + \cos^2\theta\Delta\varphi^2) && \text{ou} \\ \Delta\tau^2 &= \Delta t^2 - R(t)^2 (\Delta x^2 + \Delta y^2) && \text{ou} \\ \Delta\tau^2 &= \Delta t^2 - R(t)^2 (\Delta\theta^2 + \cosh^2\theta\Delta\varphi^2)\end{aligned}$$

consoante o espaço é hiperesférico, Euclidiano ou hiperbólico (a forma exacta da função \cosh , dita o **co-seno hiperbólico**, não nos será necessária).

7.4 Lei de Hubble nos modelos FLRW

Em problemas para os quais só é importante uma dimensão espacial podemos restringir os modelos FLRW a uma linha em que φ (ou y no caso Euclidiano) é constante. Deste modo, a métrica vem igual para os três modelos:

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - R(t)^2 \Delta\theta^2$$

(onde $\theta = x$ no caso Euclidiano).

³⁶Arno Penzias (1933–), físico americano, prémio Nobel da Física (1978).

³⁷Robert Wilson (1936–), físico americano, prémio Nobel da Física (1978).

³⁸Ralph Alpher (1921–), físico americano.

³⁹George Gamow (1904–1968), físico ucraniano

⁴⁰Robert Herman (1914–), físico americano.

As linhas em que a coordenada θ é mantida constante são geodésicas: o seu comprimento entre dois acontecimentos P e Q de coordenadas temporais t_P e t_Q é $t_Q - t_P$, ao passo que qualquer outra curva causal unindo os mesmos acontecimentos satisfaz

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - R(t)^2 \Delta\theta^2} \leq \Delta t,$$

pelo que o seu comprimento é menor ou igual a $t_Q - t_P$. A equação de Einstein implica que estas geodésicas são as histórias das galáxias, que estão portanto em queda livre. Além disso, vemos que a coordenada temporal t é simplesmente o tempo próprio medido pelas galáxias.

Se duas galáxias se situam nas posições $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ então a distância entre elas no instante t é

$$d(t) = R(t)(\theta_2 - \theta_1).$$

Consequentemente, num intervalo de tempo Δt a distância varia em

$$\Delta d = \Delta R(\theta_2 - \theta_1),$$

pelo que as galáxias se afastam a uma velocidade

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{\Delta R}{\Delta t}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\Delta R}{\Delta t} \frac{d}{R} = H d,$$

onde definimos

$$H(t) = \frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta t}.$$

Vemos portanto que os modelos FLRW explicam a lei de Hubble de forma natural como uma consequência da variação do raio do Universo (note-se que em geral a constante de Hubble varia no tempo). A situação é análoga ao que se passa para os pontos na superfície de um balão que está a ser enchido: a distância entre os pontos aumenta, e cada ponto vê os restantes afastarem-se tanto mais depressa quanto mais longe estão. Deve no entanto ter-se em mente que isto é apenas uma analogia. Em particular, no caso do Universo não existe nada que corresponda ao interior ou ao exterior do balão.



Figura 53: Os pontos na superfície de um balão que está a ser enchido comportam-se como as galáxias no Universo em expansão.

7.5 Desvio para o vermelho nos modelos FLRW

A métrica FLRW é invariante por translacções em θ . Quer isto dizer que o intervalo entre dois acontecimentos muito próximos P_1 e P_2 , de coordenadas (t_1, θ_1) e (t_2, θ_2) , é igual ao intervalo entre os acontecimentos Q_1 e Q_2 de coordenadas $(t_1, \theta_1 + \Omega)$ e $(t_2, \theta_2 + \Omega)$, para qualquer $\Omega \in \mathbb{R}$. Portanto se γ é uma geodésica, isto é, uma curva de comprimento máximo entre dois pontos, a curva γ' obtida a partir de γ movendo todos os seus pontos para os pontos com coordenada θ aumentada de Ω é também uma geodésica. O mesmo é verdade se γ é uma geodésica nula.

Consideremos duas galáxias O e O' , de coordenadas θ e θ' . Suponhamos que O envia no instante t um sinal luminoso de período T para O' . As histórias dos raios de luz correspondentes ao início e ao fim do período são geodésicas nulas γ e γ' , satisfazendo portanto

$$\Delta t^2 - R(t)^2 \Delta \theta^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta \theta} = R(t)$$

(supondo que o sinal se propaga na direcção de θ crescente). Da Figura 54 é fácil ver que γ se pode obter a partir de γ' por translação de Ω na coordenada θ , e que o período T medido por O está relacionado com Ω mediante

$$\frac{T}{\Omega} = \frac{\Delta t}{\Delta \theta} = R(t).$$

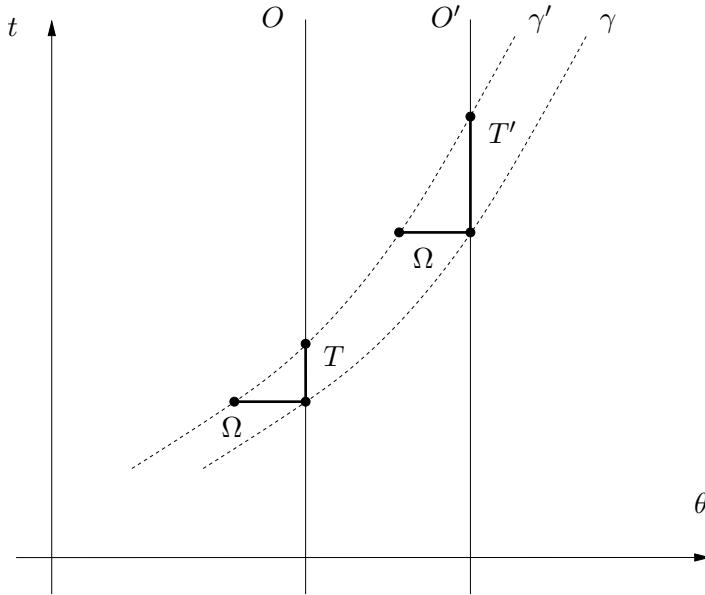


Figura 54: Desvio para o vermelho na geometria FLRW.

Do mesmo modo, o período T' medido por O' satisfaz

$$\frac{T'}{\Omega} = \frac{\Delta t}{\Delta \theta} = R(t'),$$

onde t' é o instante em que o sinal é recebido. Concluímos que

$$1 + z = \frac{T'}{T} = \frac{R'}{R},$$

onde R é o raio do Universo no instante de emissão e R' é o raio do Universo no instante da recepção. Portanto o desvio para o vermelho z não indica directamente a velocidade v de recessão da fonte, mas sim quanto é que o Universo se expandiu desde que o sinal luminoso foi emitido. Para desvios para o vermelho pequenos, no entanto, tem-se $z \simeq v$.

7.6 Equações de Friedmann

A variação de $R(t)$ é determinada pela equação de Einstein, que nos modelos FLRW se reduz às **equações de Friedmann**:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \pm \sqrt{\frac{2E}{R} + \frac{\Lambda R^2}{3} - k};$$

$$E = \frac{4\pi R^3}{3}\rho,$$

onde Λ é a constante cosmológica, E é uma outra constante, ρ é a densidade média da matéria (que é portanto constante em todo o espaço, dependendo apenas do tempo) e $k = 1$ para a hiperesfera, $k = 0$ para o espaço Euclidiano e $k = -1$ para o espaço hiperbólico. A equação de Einstein implica ainda que as histórias partículas de matéria são as curvas de coordenadas espaciais constantes.

Uma vez que a densidade do Universo é positiva, temos $E > 0$. Por outro lado, as observações de Hubble implicam que R está a aumentar, e que portanto devemos tomar o sinal positivo na primeira equação de Friedmann. Mais ainda, sabe-se desde 1998 (a partir de observações de supernovas) que $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ está a aumentar; da primeira equação de Friedmann vemos então que devemos ter $\Lambda > 0$. Consequentemente, o raio do Universo é estritamente crescente (isto é óbvio nos casos Euclidiano e hiperbólico, e pode mostrar-se ser verdade no caso hiperesférico). Quer isto dizer que o raio do Universo foi zero num certo ponto do seu passado (dito o **Big Bang**), que se estima ter ocorrido há cerca de 14000 milhões de anos. A segunda equação de Friedmann implica que nessa altura a densidade do Universo era infinita (bem como a sua temperatura). Vemos ainda que o destino do Universo será expandir-se para sempre (a um ritmo cada vez maior), tornando-se cada vez menos denso e mais frio.

A primeira equação de Friedmann pode ser reescrita como

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{R^2},$$

onde

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}$$

representa a densidade da energia do vácuo. Vemos então que o Universo será hiperesférico ($k = 1$), Euclidiano ($k = 0$) ou hiperbólico ($k = -1$) consoante a densidade total do Universo $\rho + \rho_\Lambda$ for superior, igual ou inferior à **densidade crítica**

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}.$$

Infelizmente, as observações de que dispomos actualmente não são suficientemente precisas para decidir qual deste casos realmente ocorre. Sabe-se no entanto que o Universo está muito próximo de ser Euclidiano, com

$$\rho \simeq \frac{\rho_c}{3} \quad \text{e} \quad \rho_\Lambda \simeq \frac{2\rho_c}{3}.$$

A matéria directamente observável – estrelas, galáxias – constitui apenas 20% da quantidade total de matéria que tem que existir para explicar o movimento das estrelas e galáxias. Os restantes 80% correspondem à chamada **matéria escura**, cuja natureza exacta não é ainda conhecida.

7.7 Fórmulas importantes

- Desvio para para o vermelho:

$$T' = T(1 + z)$$

- Lei de Hubble:

$$v = Hd$$

- Desvio para o vermelho nos modelos FLRW:

$$1 + z = \frac{R'}{R}$$

- Primeira equação de Friedmann:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \pm \sqrt{\frac{2E}{R} + \frac{\Lambda R^2}{3} - k} \quad \text{ou} \quad H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{R^2}$$

- Segunda equação de Friedmann:

$$E = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

- Densidade de energia do vácuo:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}$$

- Densidade crítica:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}$$

- Densidades observadas:

$$\rho \simeq \frac{\rho_c}{3} \quad \text{e} \quad \rho_\Lambda \simeq \frac{2\rho_c}{3}$$

7.8 Exercícios

1. A que velocidade corresponde o desvio para o vermelho produzido pela gravidade do Sol na luz que abandona a sua superfície?
2. A **paralaxe** de uma estrela é **metade** do desvio máximo na sua posição aparente no céu devido ao movimento anual da Terra. Um **parsec** é a distância a que se encontra uma estrela cuja paralaxe é de 1 segundo de grau. Mostre que 1 parsec é aproximadamente igual a 3,26 anos-luz.

3. O Sol orbita o centro da Via Láctea a uma distância de cerca 8 quiloparsecs, a uma velocidade de cerca de 220 quilómetros por segundo. Qual o período da órbita? Quantas órbitas já completou o Sol desde a sua formação, há cerca de 4500 milhões de anos?
4. Qual deveria ser a velocidade da galáxia de Andrómeda em relação à Terra, de acordo com a lei de Hubble?
5. Qual a velocidade de recessão
 - (a) Da supernova mais distante que se conhece, a cerca de 5000 megaparsecs da Terra?
 - (b) Do quasar mais distante que se conhece, a cerca de 10000 megaparsecs da Terra?
 - (c) De uma proto-galáxia na fronteira do universo observável, a cerca de 15000 megaparsecs da Terra?

Será que isto contradiz o facto de nenhum objecto se poder mover mais depressa que a luz?

6. Mostre que para desvios para o vermelho pequenos se tem $z \simeq v$.
7. Durante quanto tempo é observável na Terra um fenómeno que dure 20 dias
 - (a) Na supernova mais distante que se conhece, cujo desvio para o vermelho é $z = 1,7$?
 - (b) No quasar mais distante que se conhece, cujo desvio para o vermelho é $z = 6,4$?
8. O brilho com que uma galáxia é observada na Terra é determinado pelo correspondente fluxo luminoso, isto é, pela quantidade de energia emitida pela galáxia que incide sobre uma unidade de superfície na Terra por unidade de tempo. Se a galáxia possui uma luminosidade L , ou seja, emite uma quantidade de energia total L por unidade de tempo, e se encontra a uma distância d da Terra, então essa energia estará dispersa pela área de uma superfície esférica de raio d . Portanto o fluxo num Universo Euclidiano é

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}.$$

- (a) Se o desvio para o vermelho é não desprezável, esta fórmula tem que ser corrigida para

$$F = \frac{L}{4\pi d^2(1+z)^2}.$$

Porquê?

- (b) Se o Universo for hiperesférico, será o fluxo à mesma distância d maior ou mais pequeno que no caso Euclidiano?

9. É possível deduzir das observações cosmológicas existentes que

$$\frac{\rho + \rho_\Lambda}{\rho_c} < 1,04.$$

Mostre que se o Universo for hiperesférico então o seu raio é superior a 22000 megaparsecs. Se fosse de facto este o raio do Universo, a que distância se encontraria o ponto antípoda da Terra? Com que velocidade se estaria a afastar?

10. Se o Universo for hiperesférico, expandir-se-á para sempre (e terá existido um Big Bang) se e só se a velocidade de expansão nunca se anular, isto é, se e só se a função

$$f(R) = \frac{2E}{R} + \frac{\Lambda R^2}{3} - 1$$

for estritamente positiva para todo o $R > 0$.

- (a) Mostre que

$$f(R) > \left(\frac{4\Lambda E^2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

para todo o $R > 0$.

- (b) Use $\rho \simeq \frac{\rho_c}{3}$ e $\rho_\Lambda \simeq \frac{2\rho_c}{3}$ para deduzir que

$$f(R) > \frac{2^{\frac{1}{3}} H^2 R^2}{3} - 1$$

onde H e R são a constante de Hubble e o raio do Universo no presente.

- (c) Conclua que se o Universo é hiperesférico então expandir-se-á para sempre (e proveio de um Big Bang).

11. Estime a idade do Universo supondo $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ constante.

12. (a) Mostre que a constante de Hubble será sempre superior a 57 quilómetros por segundo por megaparsec.
 (b) Mostre que o raio do Universo duplicará em menos de 17000 milhões de anos.
 (c) Conclua que mesmo que o Universo seja hiperesférico será impossível circum-navegá-lo.

13. Durante muito tempo pensou-se que a constante cosmológica poderia ser exactamente igual a zero. Como seria a evolução do Universo neste caso?

14. Mostre que o raio mínimo do Universo de Sitter é $\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$. Qual seria o raio mínimo de um Universo de Sitter cuja constante cosmológica fosse igual à nossa?

15. Pode mostrar-se que o raio do Universo de Einstein é dado por

$$R = \left(\frac{3E}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Mostre que para este Universo se tem

$$\rho = 2\rho_\Lambda.$$

Qual o raio de um Universo de Einstein cuja constante cosmológica é igual à nossa?

16. Mostre que uma partícula em queda livre no Universo de Einstein se move ao longo de uma geodésica da hiperesfera. O que veria um observador no Universo de Einstein?
 17. Todos os objectos visíveis a partir da Terra estão a uma distância inferior acerca de 15000 megaparsecs (raio do Universo observável). Diz-se que os pontos do Universo que estão a esta distância da Terra formam o seu **horizonte cosmológico**.

- (a) Porque é que existe um horizonte cosmológico?
- (b) Qual é o desvio para o vermelho de um objecto no horizonte?
- (c) Quanto tempo demoraria a luz a percorrer a distância até ao horizonte?
- (d) Compare o intervalo de tempo calculado na alínea anterior com a idade do Universo. Existe aqui alguma contradição?
18. Porque é que o céu é escuro à noite? Será o céu escuro à noite no Universo de Einstein?
19. A temperatura de um sistema é uma medida da energia média por partícula.
- (a) Mostre que a temperatura da radiação cósmica de fundo é inversamente proporcional ao raio do Universo. Qual era a sua temperatura no Big Bang?
- (b) Sabendo que a radiação cósmica de fundo deixou de interagir com a matéria quando a temperatura do Universo era de cerca de 2940 graus Kelvin, e que a sua temperatura actual é de cerca de 2,7 graus Kelvin, calcule o desvio para o vermelho que a radiação cósmica de fundo sofreu desde então.
- (Por definição a água congela a 273 graus Kelvin e ferve a 373 graus Kelvin; o zero da escala é o chamado **zero absoluto**, porque é a temperatura mais baixa que é possível obter. Note-se que a expansão do Universo arrefeceu a radiação cósmica de fundo desde cerca de metade da temperatura da superfície do Sol – 5800 graus Kelvin – até quase ao zero absoluto).
20. A *Enterprise* atravessa uma distorção no espaço-tempo e emerge numa região desconhecida, na qual a temperatura da radiação cósmica de fundo é de 5,4 graus Kelvin e a constante de Hubble é de 90 quilómetros por segundo por megaparsec. Encontrar-se-á a *Enterprise* no nosso Universo?



Figura 55: A *Enterprise* emerge numa região desconhecida.

7.9 Soluções

- O desvio para o vermelho produzido pela gravidade do Sol é igual à diferença de potencial gravitacional entre o infinito e a superfície do Sol, ou seja, cerca de $\frac{1,5}{2,6 \times 300000}$. Isto é o

desvio para o vermelho produzido por uma velocidade de cerca de $300000 \times \frac{1,5}{2,6 \times 300000} \simeq 0,6$ quilómetros por segundo. Para comparação, as velocidades das estrelas próximas em relação ao Sol são da ordem da centena de quilómetros por segundo.

2. A Figura 56 ilustra o facto de que a paralaxe de uma estrela é o ângulo α entre a recta que une o Sol à estrela e a recta que une a Terra à estrela. Este ângulo será em geral muito pequeno, e portanto aproximadamente igual à sua tangente (quando expresso em radianos). Deste modo, a distância do Sol à estrela quando a paralaxe é de 1 segundo de grau é de aproximadamente

$$\frac{8,3}{\frac{\pi}{180 \times 3600}} \text{ minutos-luz},$$

ou seja, cerca de

$$\frac{8,3}{\frac{\pi}{180 \times 3600} \times 60 \times 24 \times 365} \simeq 3,26 \text{ anos-luz}.$$

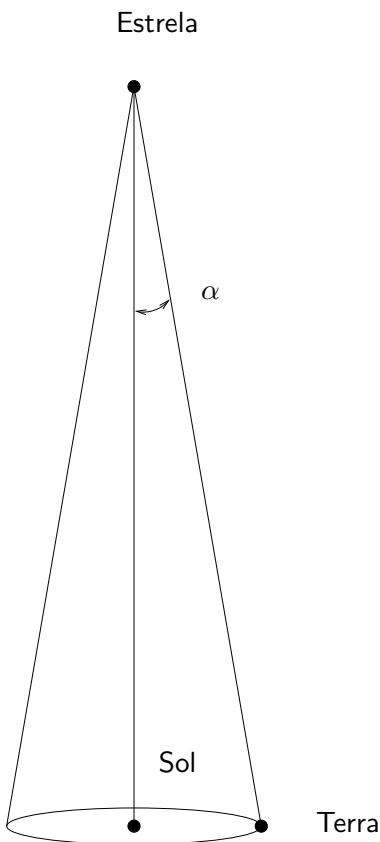


Figura 56: Paralaxe de uma estrela.

3. Para completar uma órbita o Sol deve percorrer cerca de

$$2\pi \times 8 \times 10^3 \times 3,26 \simeq 1,6 \times 10^5 \text{ anos-luz}.$$

Como a sua velocidade é de cerca de

$$\frac{220}{300000} \simeq 7,3 \times 10^{-4},$$

vemos que para completar uma órbita o Sol necessita de cerca de

$$\frac{1,6 \times 10^5}{7,3 \times 10^{-4}} \simeq 2,2 \times 10^8 \text{ anos},$$

ou seja, cerca de 220 milhões de anos. Consequentemente, desde a sua formação o Sol já completou cerca de

$$\frac{4500}{220} \simeq 20$$

órbitas.

4. De acordo com a lei de Hubble, a galáxia de Andrómeda devia estar a afastar-se da Terra a uma velocidade de cerca de

$$v = Hd = 70 \times 0,8 = 56 \text{ quilómetros por segundo.}$$

Na realidade, a galáxia de Andrómeda **aproxima-se** da Terra a cerca de 300 quilómetros por segundo (e do centro da Via Láctea a cerca de 130 quilómetros por segundo), sendo uma das poucas galáxias cujo espectro apresenta um desvio para o **azul**. Andrómeda encontra-se demasiado próxima da Terra para a lei de Hubble ser aplicável: a sua velocidade devida à expansão do Universo é comparável à sua **velocidade peculiar**, resultante do seu movimento orbital em torno do centro do Grupo Local. Na verdade, todo o Grupo Local parece estar a mover-se na direcção do Grande Atractor, uma grande concentração de matéria equivalente a dezenas de milhares de galáxias, situada a cerca de 75 megaparsecs da Terra. Por este motivo, a velocidade do Grupo Local em relação à radiação cósmica de fundo (que define a melhor aproximação ao referencial idealizado dos modelos FLRW) é de cerca de 600 quilómetros por segundo (o Sol move-se a cerca de 380 quilómetros por segundo neste referencial).

5. (a) De acordo com a lei de Hubble, a supernova mais distante que se conhece afasta-se da Terra a uma velocidade de cerca de

$$v = Hd = 70 \times 5000 = 350000 \text{ quilómetros por segundo,}$$

ou seja, cerca de $\frac{350000}{300000} = 1,2$ vezes a velocidade da luz.

- (b) De acordo com a lei de Hubble, o quasar mais distante que se conhece afasta-se da Terra a uma velocidade de cerca de

$$v = Hd = 70 \times 10000 = 700000 \text{ quilómetros por segundo,}$$

ou seja, cerca de $\frac{700000}{300000} = 2,3$ vezes a velocidade da luz.

- (c) De acordo com a lei de Hubble, uma proto-galáxia na fronteira do universo observável afasta-se da Terra a uma velocidade de cerca de

$$v = Hd = 70 \times 15000 = 1050000 \text{ quilómetros por segundo,}$$

ou seja, cerca de $\frac{1050000}{300000} = 3,5$ vezes a velocidade da luz.

Não existe aqui qualquer contradição, uma vez que as histórias destes objectos são curvas causais: eles não se movem mais depressa que nenhum sinal luminoso na sua vizinhança. O

que se passa é que num dado intervalo de tempo a distância entre eles e a Terra aumenta mais do que a distância que a luz percorreria no mesmo intervalo de tempo. Na analogia do balão, o que é proibido aos objectos é moverem-se mais depressa que a luz em relação à superfície do balão; no entanto, se este encher suficientemente depressa, a distância entre dois pontos da sua superfície pode aumentar a um ritmo tão grande quanto se quiser.

6. A lei de Hubble escreve-se

$$v = Hd = \frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta t} d.$$

Se $z \ll 1$ então o raio do Universo não aumentou muito no intervalo Δt que a luz demorou a percorrer a distância d , e portanto $d \simeq \Delta t$. Consequentemente, obtemos a fórmula aproximada

$$v \simeq \frac{\Delta R}{R}.$$

Uma vez que

$$z = \frac{R'}{R} - 1 = \frac{R' - R}{R} = \frac{\Delta R}{R},$$

vemos que para $z \ll 1$ se tem

$$z \simeq v.$$

7. (a) Um fenómeno que dure 20 dias na supernova é observável na Terra durante

$$T' = T(1 + z) = 20 \times (1 + 1,7) = 52 \text{ dias.}$$

Este efeito já foi observado para várias supernovas (cuja duração média é conhecida).

- (b) Um fenómeno que dure 20 dias no quasar é observável na Terra durante

$$T' = T(1 + z) = 1 \times (1 + 6,4) = 148 \text{ dias.}$$

8. (a) Devido ao desvio para o vermelho, os fotões emitidos pela galáxia ao longo de um intervalo de tempo T são observados na Terra ao longo de um intervalo de tempo $T' = T(1 + z)$. Logo, observam-se na Terra $1 + z$ menos fotões por unidade de tempo que os que foram emitidos. Isto diminui o fluxo por um factor de $1 + z$.

Por outro lado, um fotão que foi emitido com período T possui ao chegar à Terra período $T' = T(1 + z)$. Pela relação de Planck-Einstein, o fotão foi emitido com energia

$$E = \frac{h}{T},$$

e alcança a Terra com energia

$$E' = \frac{h}{T'} = \frac{h}{T(1 + z)} = \frac{E}{1 + z}.$$

Isto reduz o fluxo por um factor adicional de $1 + z$.

- (b) Uma circunferência de raio d na esfera possui perímetro **inferior** a $2\pi d$. Por analogia, uma superfície esférica de raio d na hiperesfera possui área **inferior** a $4\pi d^2$. Logo, para um Universo hiperesférico o fluxo à mesma distância d é **maior** do que no caso Euclíadiano. Por outras palavras, uma estrela a uma certa distância parece **mais brilhante**

num Universo esférico do que num Universo Euclidiano. (No espaço hiperbólico, uma superfície esférica de raio d possui área **superior** a $4\pi d^2$, e portanto o fluxo à mesma distância d é **menor** do que no caso Euclidiano; portanto uma estrela a uma certa distância parece **menos brilhante** num Universo hiperbólico do que num Universo Euclidiano).

9. Se o Universo é hiperesférico a primeira equação de Friedmann escreve-se

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{1}{R^2}.$$

Dividindo esta equação por

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_c$$

obtém-se

$$\frac{\rho + \rho_\Lambda}{\rho_c} - 1 = \frac{1}{H^2 R^2},$$

e portanto

$$\frac{1}{H^2 R^2} < 0,04 \Leftrightarrow R > \frac{1}{0,2H}.$$

Em unidades geometrizadas,

$$\frac{1}{H} \simeq \frac{300000}{70} \text{ megaparsecs} \simeq 4300 \text{ megaparsecs},$$

pelo que concluímos que

$$R > 22000 \text{ megaparsecs}.$$

Se fosse este de facto o raio do Universo, o ponto antípoda da Terra encontrar-se-ia (por analogia com a esfera) a uma distância de

$$d = \pi \times 22000 \simeq 69000 \text{ megaparsecs},$$

cerca de 4,6 vezes a distância à fronteira do universo observável, afastando-se a uma velocidade de

$$v = Hd = \frac{H}{0,2H} = 5$$

vezes a velocidade da luz.

10. (a) A parcela $\frac{2E}{R}$ é estritamente decrescente, ao passo que a parcela $\frac{\Lambda R^2}{3}$ é estritamente crescente. As duas parcelas são iguais para

$$\frac{2E}{R} = \frac{\Lambda R^2}{3} \Leftrightarrow R = \left(\frac{6E}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}},$$

onde ambas valem

$$\frac{\Lambda}{3} \left(\frac{6E}{\Lambda} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4\Lambda E^2}{3} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Deste modo é claro que

$$f(R) > \left(\frac{4\Lambda E^2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

para todo o $R > 0$.

(b) Podemos reescrever a condição acima notando que

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\Lambda E^2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{4 \times 8\pi\rho_\Lambda \times \frac{16\pi^2 R^6}{9}\rho^2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8\pi R^2}{3} (\rho_\Lambda \times \rho^2)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{8\pi R^2}{3} \left(\frac{2}{3}\rho_c \times \frac{1}{9}\rho_c^2\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8\pi R^2}{3} \times \frac{2^{\frac{1}{3}}\rho_c}{3} = \frac{2^{\frac{1}{3}}H^2R^2}{3}. \end{aligned}$$

(c) Para que o Universo se expanda para sempre (e tenha tido origem num Big Bang) basta que

$$\frac{2^{\frac{1}{3}}H^2R^2}{3} - 1 > 0 \Leftrightarrow R > \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{1}{6}}H}$$

Em unidades geometrizadas,

$$\frac{1}{H} \simeq \frac{300000}{70} \text{ megaparsecs} \simeq 4300 \text{ megaparsecs},$$

pelo que esta condição é equivalente a

$$R > 6600 \text{ megaparsecs.}$$

Uma vez que, de acordo com o resultado do Exercício 9, se sabe que o raio do Universo é superior a 22000 megaparsecs, concluímos que mesmo que o Universo seja hiperesférico a expansão durará para sempre (e terá existido um Big Bang).

11. Se $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ fosse constante, a idade do Universo seria

$$\frac{R}{\frac{\Delta R}{\Delta t}} \simeq 3,26 \times \frac{300000}{70} \text{ milhões de anos} \simeq 14000 \text{ milhões de anos}.$$

Este valor está de facto muito próximo do valor calculado rigorosamente (considerando a variação de $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ no tempo).

12. (a) O valor de H é determinado pela primeira equação de Friedmann, na qual o termo $\frac{k}{R^2}$ pode ser ignorado (como se viu no Exercício 9). À medida que R aumenta, ρ diminui, mas ρ_Λ mantém-se constante. Uma vez que $\rho_\Lambda \simeq \frac{2}{3}\rho_c$, vemos então que H^2 será sempre superior a $\frac{2}{3}$ do seu valor actual, e portanto H será sempre superior a

$$H_\infty = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 70 \simeq 57 \text{ quilómetros por segundo por megaparsec.}$$

(b) Seja R_0 o valor actual do raio do Universo. Então teremos

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = RH > R_0 H_\infty,$$

uma vez que e portanto R duplicará num intervalo de tempo inferior a

$$\frac{R_0}{R_0 H_\infty} = \frac{1}{H_\infty} \simeq 3,26 \times \frac{300000}{57} \text{ milhões de anos} \simeq 17000 \text{ milhões de anos}.$$

- (c) No Exercício 9 vimos que se o Universo for hiperesférico o seu raio actual é de pelo menos 22000 megaparsecs. Em 17000 milhões de anos, um sinal luminoso percorre

$$\frac{17000}{3,26} \simeq 5200 \text{ megaparsecs},$$

ou seja, menos de

$$\frac{5200}{22000} \simeq 0,24 \text{ radianos}$$

da hiperesfera. Mas entretanto o raio do Universo mais que duplicou, e portanto nos 17000 anos seguintes o sinal luminoso percorrerá apenas menos de $\frac{1}{2} \times 0,24$ radianos. Repetindo este raciocínio, vemos que o sinal luminoso nunca percorrerá mais que

$$0,24 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 0,24 \times 2 = 0,48 \text{ radianos}$$

da hiperesfera, e portanto não a conseguirá circum-navegar.

13. Da primeira equação de Friedmann (com $\Lambda = 0$) vemos que para os Universos Euclidiano e hiperbólico a expansão continuaria para sempre, mas não aceleraria: a velocidade de expansão tenderia para zero no caso Euclidiano ou para 1 no caso hiperbólico. O Universo hiperesférico, contudo, atingiria um raio máximo (igual a $2E$) e colapsaria de novo numa hiperesfera de raio zero (**Big Crunch**).
14. O Universo de de Sitter corresponde a $k = 1$ e $E = 0$. Da primeira equação de Friedmann vemos então que devemos ter

$$\frac{\Lambda R^2}{3} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow R \geq \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}.$$

Portanto o Universo de de Sitter contrai-se até este raio mínimo e torna a expandir-se, sob o efeito repulsivo da constante cosmológica.

A constante cosmológica do nosso Universo é aproximadamente dada por

$$\rho_\Lambda = \frac{2}{3}\rho_c \Leftrightarrow \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{2}{3} \times \frac{3H^2}{8\pi} \Leftrightarrow \Lambda = 2H^2,$$

pelo que o raio mínimo de um Universo de de Sitter cuja constante cosmológica fosse igual à nossa seria

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{H} \simeq 5300 \text{ megaparsecs},$$

já que em unidades geometrizadas

$$\frac{1}{H} \simeq \frac{300000}{70} \text{ megaparsecs} \simeq 4300 \text{ megaparsecs}.$$

15. Uma vez que o Universo de Einstein é uma hiperesfera ($k = 1$) de raio constante, a primeira equação de Friedmann implica

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = 0 \Leftrightarrow \frac{2E}{R} + \frac{\Lambda R^2}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2E}{R^3} + \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{R^2}.$$

Usando

$$R = \left(\frac{3E}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}$$

obtemos

$$\frac{2\Lambda}{3} + \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}.$$

A primeira equação de Friedmann pode então ser reescrita como

$$\frac{2E}{R^3} = \frac{2\Lambda}{3}.$$

Usando a segunda equação de Friedmann vem

$$\frac{8\pi}{3}\rho = \frac{2\Lambda}{3} \Leftrightarrow \rho = \frac{2\Lambda}{8\pi} = 2\rho_\Lambda.$$

Para o nosso Universo, tem-se aproximadamente

$$\rho_\Lambda = \frac{2}{3}\rho_c \Leftrightarrow \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{2}{3} \times \frac{3H^2}{8\pi} \Leftrightarrow \Lambda = 2H^2.$$

Portanto, um Universo de Einstein cuja constante cosmológica fosse igual à nossa teria um raio igual a

$$R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}H} \simeq 3000 \text{ megaparsecs},$$

já que em unidades geometrizadas

$$\frac{1}{H} \simeq \frac{300000}{70} \text{ megaparsecs} \simeq 4300 \text{ megaparsecs}.$$

16. Uma vez que a métrica do Universo de Einstein é

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - R^2 (\Delta\theta^2 + \cos^2\theta\Delta\varphi^2),$$

vemos que para maximizar $\Delta\tau^2$ a partícula deve minimizar

$$\Delta s^2 = R^2 (\Delta\theta^2 + \cos^2\theta\Delta\varphi^2),$$

ou seja, deve percorrer uma geodésica da esfera.

Consequentemente, os raios luminosos devem também percorrer geodésicas da esfera. Portanto qualquer galáxia no Universo de Einstein vê múltiplas imagens dela própria, cada imagem correspondendo a raios luminosos que circum-navegaram o Universo um número inteiro de vezes. Note-se que estas imagens mostram a galáxia em épocas diferentes, separadas por intervalos de tempo de $2\pi R$ (onde R é o raio do Universo). Além disso, estes raios luminosos chegam de todas as direcções do céu, e portanto fornecem imagens muito ampliadas. Aliás, o tamanho aparente de qualquer objecto que se afaste da galáxia diminui apenas até este estar a uma distância de $\frac{\pi}{2}R$ (i.e. até alcançar o “equador”), começando a **aumentar** a partir desse ponto, sendo a ampliação máxima no ponto antípoda (a uma distância de πR).

17. (a) O horizonte cosmológico é devido à existência do Big Bang: a luz só teve ainda cerca de 14000 milhões de anos para se propagar. Se o raio do Universo fosse constante, isso significaria que o horizonte cosmológico se situaria a uma distância de 14000 milhões de anos-luz; a expansão do Universo aumenta este número (porque no passado o Universo era menor).
- (b) O horizonte corresponde a pontos cuja luz foi emitida no instante do Big Bang, quando o raio do Universo era zero. Da fórmula do desvio para o vermelho nos modelos FLRW vemos então que o desvio para o vermelho destes pontos é infinito.
- (c) A luz demoraria $3,26 \times 15000 \simeq 49000$ anos a percorrer a distância até ao horizonte.
- (d) O intervalo de tempo calculado na alínea anterior é $\frac{49000}{14000} = 3,5$ vezes a idade do Universo. Não existe aqui nenhuma contradição, porque a luz **não teve** que percorrer toda esta distância para chegar até nós a partir do horizonte, já que o Universo era menor no passado.
18. O céu é escuro à noite porque existe um horizonte: não conseguimos ver as estrelas que estão para além de uma certa distância. Se tal não acontecesse (e se as estrelas fossem eternas) então veríamos infinitas estrelas e o céu seria insuportavelmente brilhante. Quantitativamente, supondo o Universo Euclidiano e contendo em média n estrelas por unidade de volume, teríamos aproximadamente

$$n \times 4\pi r^2 \times \Delta r$$

estrelas em qualquer camada esférica de raio r e espessura $\Delta r \ll r$. Assumindo uma luminosidade média L para cada estrela, o fluxo luminoso total produzido na Terra pela camada esférica seria

$$F = n \times 4\pi r^2 \times \Delta r \times \frac{L}{4\pi r^2} = nL\Delta r$$

(independente de r). Se existissem infinitas camadas esféricas a contribuir, o fluxo total seria infinito.

Mesmo que o Universo fosse hiperesférico (contendo, portanto, finitas estrelas), a situação não se alteraria, uma vez que neste caso se veriam infinitas imagens de cada estrela. Consequentemente, o céu não seria escuro à noite no Universo de Einstein.

19. (a) A temperatura da radiação cósmica de fundo é proporcional à energia dos fotões que a compõem. Pela relação de Planck-Einstein, esta energia é inversamente proporcional ao período, e portanto inversamente proporcional ao raio do Universo. Logo, a temperatura da radiação cósmica de fundo era infinita no Big Bang .
- (b) Uma vez que a temperatura da radiação cósmica de fundo é proporcional ao seu período, o desvio para o vermelho que a radiação cósmica de fundo sofreu desde que deixou de interagir com a matéria é dado por

$$1 + z = \frac{2940}{2,7} \simeq 1089 \Leftrightarrow z \simeq 1088.$$

20. Se a *Enterprise* estivesse no nosso Universo então teria recuado até à época em que o raio era metade do raio actual, quando a temperatura da radiação cósmica de fundo era o dobro. Nesta época, a densidade da energia do vácuo era a mesma que hoje em dia, mas a

densidade da matéria era $2^3 = 8$ vezes superior. Pela primeira equação de Friedmann (na qual o termo $\frac{k}{R^2}$ pode ser ignorado, como se viu no Exercício 9) o quadrado da constante de Hubble seria então

$$\frac{2}{3} + 8 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

vezes superior ao seu valor actual, ou seja, a constante de Hubble deveria ser

$$\sqrt{\frac{10}{3}} \times 70 \simeq 130 \text{ quilómetros por segundo por megaparsec.}$$

Uma vez que este valor é muito diferente do valor observado, a *Enterprise* não pode estar no nosso Universo.

8 Matemática e Física

8.1 Matemática para a Relatividade Geral

Qual a Matemática que é necessária para compreender a Relatividade Geral?

Em primeiro lugar, é necessário saber **Cálculo Infinitesimal**. Este capítulo básico da Matemática, iniciado sobretudo por Leibniz⁴¹ e Newton no século XVII, surge em quase todas as áreas de aplicação da Matemática, da Economia à Física de Partículas. O Cálculo Infinitesimal ocupa-se dos conceitos fundamentais de **limite**, **derivada** e **integral**. Por exemplo, quando dissemos que a velocidade instantânea u é a razão

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

para Δt muito pequeno, devíamos, em rigor, ter dito que u é o **limite** desta razão quando Δt tende para zero, e escrito

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Este limite é na verdade um exemplo de uma **derivada** (taxa de variação instantânea). Diz-se que u é a derivada de x em ordem a t , e escreve-se

$$u = \frac{dx}{dt}.$$

Por outro lado, quando escrevemos que o comprimento l de uma curva se podia calcular aproximando a curva por uma linha quebrada e somando os comprimentos de cada segmento,

$$l = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N,$$

devíamos, em rigor, ter dito que l é o **limite** desta soma quando o comprimento do maior segmento da linha quebrada tende para zero (e portanto o número de segmentos tende para infinito). Este limite é um exemplo de um **integral**, e escreve-se

$$l = \int ds$$

(o símbolo \int é uma deformação de um “s” de “soma”). Os conceitos de derivada e integral são (num certo sentido preciso) inversos um no outro, de acordo com o **Teorema Fundamental do Cálculo** (descoberto por Newton e Leibniz).

Como vimos, os movimentos de partículas em Relatividade Geral (bem como na teoria Newtoniana) obtêm-se resolvendo **equações diferenciais**, que são na realidade equações que relacionam as funções incógnitas com as suas derivadas. Muitos fenómenos físicos (som, luz, calor, ondas) são modelados por equações diferenciais (a própria equação de Einstein é uma equação diferencial).

Para além destes conceitos básicos, a formulação rigorosa da Relatividade Geral requer conhecimentos de **geometria diferencial**, que é a área da Matemática que se ocupa do estudo dos espaços curvos.

⁴¹Gottfried von Leibniz (1646–1716), matemático, filósofo, diplomata e advogado alemão.



Figura 57: Gottfried von Leibniz.

8.2 Física Moderna

Como vimos, torna-se necessário substituir a Física Newtoniana pela Relatividade Restrita quando as velocidades envolvidas são comparáveis à da luz, e pela Relatividade Geral quando os campos gravitacionais envolvidos são suficientemente fortes para gerar velocidades dessa ordem de grandeza. Isto não significa que a Física Newtoniana esteja errada: apenas que só se aplica em certas circunstâncias.

Do mesmo modo, descobriu-se, também no início do século XX, que se torna necessário substituir a Física Newtoniana pela **Mecânica Quântica** quando as dimensões dos objectos envolvidos são muito pequenas. Se além disso as velocidades são da ordem da da luz, a Mecânica Quântica deve ser combinada com a Relatividade Restrita; a teoria resultante chama-se **Teoria Quântica de Campo**, e é a teoria na qual se baseia o **Modelo Padrão**, que descreve todas as partículas e forças conhecidas excepto a gravidade. Para incluir a gravidade neste esquema seria necessário combinar a Mecânica Quântica com a Relatividade Geral, obtendo assim a teoria da **Gravidade Quântica**; infelizmente, até hoje ninguém foi capaz de o fazer. Actualmente, o candidato mais promissor para o conseguir parece ser a chamada teoria das **Supercordas**.

9 Dados astronómicos

- Raio da Terra: 6400 quilómetros.
- Raio do Sol: 2,3 segundos-luz.
- Raio da órbita da Lua: 1,3 segundos-luz.
- Raio da órbita da Terra: 8,3 minutos-luz.
- Massa geometrizada da Terra: 4,5 milímetros.
- Massa geometrizada do Sol: 1,5 quilómetros.
- Constante de Hubble: 70 quilómetros por segundo por megaparsec.
- Raio do Universo observável: 15000 megaparsecs.
- Idade do Universo: 14000 milhões de anos.