Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Recuperação do 2º Teste – 4 de Janeiro de 2005

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana definida por $M = \mathbb{R}^2$ e

$$g = \frac{1}{h^2(x,y)}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

onde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função positiva.

(3 val.) (a) Mostre que a forma de conexão ω_1^2 associada ao referencial ortonormado $E_1 = h\frac{\partial}{\partial x}$, $E_2 = h\frac{\partial}{\partial y}$ é dada por

$$\omega_1^2 = \frac{h_y}{h}dx - \frac{h_x}{h}dy,$$

onde $h_x = \frac{\partial h}{\partial x}$ e $h_y = \frac{\partial h}{\partial y}$.

(3 val.) (b) Mostre que (M, g) possui curvatura de Gauss

$$K = h(h_{xx} + h_{yy}) - (h_x^2 + h_y^2).$$

(c) Considere $h(x, y) = \cosh(x)$.

(3 val.) (i) Justifique que neste caso (M, g) não é geodesicamente completa.

(3 val.) (ii) Mostre que as equações locais de uma geodésica são:

$$\ddot{x} - \tanh(x)\ (\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0;$$
$$\ddot{y} - 2\tanh(x)\ \dot{x}\,\dot{y} = 0.$$

(2 val.) (iii) Prove que o eixo dos yy é a (imagem) de uma geodésica.

(2 val.) (iv) Mostre que a distância da origem ao ponto $(0, 1)$ é menor ou igual que 1.

(4 val.) (2) (*Teorema de Shur*) Mostre que se M é uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$, conexa e isotrópica (i.e. isotrópica em todos os seus pontos) então M tem curvatura constante.

Sugestão: Utilize as equações de estrutura para mostrar que $dK = 0$.