Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Teste de Recuperação 2 – 16 de Janeiro de 2006

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Seja M a imagem da parametrização $\varphi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v),$$
e seja N a imagem da parametrização $\psi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u).$$
Consideramos as métricas g e h induzidas em M e N pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

(2.5 val.) (a) Mostre que
$$g = du \otimes du + (1 + u^2) dv \otimes dv.$$

(2.5 val.) (b) Mostre que
$$h = \frac{1 + u^2}{u^2} du \otimes du + u^2 dv \otimes dv.$$

(3 val.) (c) Mostre que a curvatura de Gauss de N é
$$K_N = -\frac{1}{(1 + u^2)^2}.$$

(3 val.) (d) Calcule a curvatura de Gauss de M e conclua que a aplicação $f : M \to N$ definida por
$$f(\varphi(u, v)) = \psi(u, v)$$
preserva a curvatura de Gauss.

(3 val.) (e) Mostre que f não é uma isometria local.

(2) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n, ∇ a conexão de Levi-Civita associada à métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\widetilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita associada à métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = e^{2\rho} \langle \cdot, \cdot \rangle$, onde ρ é uma função diferenciável. (As métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ dizem-se **conformes**).

(3 val.) (a) Mostre que
$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X) Y + d\rho(Y) X - \langle X, Y \rangle \operatorname{grad} \rho.$$
Recorde que $\operatorname{grad} \rho$ é o campo vectorial que satisfaz $\langle \operatorname{grad} \rho, X \rangle = d\rho(X)$, para qualquer $X \in \chi(M)$.

(3 val.) (b) O **Laplaciano** de $f \in C^\infty(M)$ é definido localmente por
$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} dx^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \operatorname{grad} f \right).$$
Mostre que se $n = 2$ então $\widetilde{\Delta} f = e^{-2\rho} \Delta f$.