Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 6 de Novembro de 2010 - 13h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(3 val.) (a) Diga, justificadamente, se f é contínua na origem.

Resolução: A função f é contínua na origem sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Podemos começar por analisar os limites direccionais:

$$\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{x^3mx}{x^2+m^2x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{mx^2}{1+m^2}\right) = \cos 0 = 1.$$

Se existir limite de f na origem terá de ser 1. Como

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| = |xy|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |xy|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy| \to 0,$$

concluimos que o limite de f na origem é 1 e portanto a função é contínua na origem.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos 0 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(3 val.) 2. Considere a função $h(x,y) = (x^3+xy^2, \log(xy))$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(2,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada de $g \circ h$ no ponto $(1,1)$ segundo o vector $v = (0,1)$.

Resolução: Uma vez que que h e g são funções diferenciáveis, pelo teorema da derivação da função composta podemos concluir que $g \circ h$ é diferenciável e

$$D_v(g\circ h)(1,1) = D(g\circ h)(1,1)\cdot v.$$

Temos

$$\begin{aligned} D(g\circ h)(1,1) &= Dg(h(1,1))Dh(1,1) = Dg(2,0)Dh(1,1) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x^2+y^2 & 2xy \\ 1/x & 1/y \end{bmatrix}_{|(1,1)} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo

$$D_v(g\circ h)(1,1) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = e^y + \cos(x+y)\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

Resolução: O conjunto M é o conjunto de nível zero da função de classe C^1 definida por

$$F(x,y,z) = e^y + \cos(x+y) - z.$$

A matriz jacobiana

$$DF(x,y,z) = [-\operatorname{sen}(x+y) \quad -\operatorname{sen}(x+y)+e^y \quad -1]$$

tem característica 1 para todos os pontos de $\mathbb{R}^3$, logo M é uma variedade de dimensão 3-1=2.

(2 val.) (b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(\pi,0,0)$.

Resolução: Sabemos que uma base do espaço normal a M no ponto $(\pi,0,0)$ é dada pelo vector $DF(\pi,0,0) = (0,1,-1)$. Logo os vectores $v=(x,y,z)\in T_{(\pi,0,0)}M$ do espaço tangente verificam

$$(0,1,-1)\cdot(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow y - z = 0,$$

ou seja,

$$T_{(\pi,0,0)}M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, y = z\right\}.$$

(3 val.) (c) Mostre que M é o gráfico de uma função $y = f(x,z)$ numa vizinhança do ponto $(\pi,0,0)$ e calcule $\frac{\partial f}{\partial z}(\pi,0)$.

Resolução: A função F definida na resolução da alínea (a) é de classe C^1, satisfaz $F(\pi,0,0)=0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pi,0,0) = (-\operatorname{sen}(x+y)+e^y)_{|(\pi,0,0)} = 1 \neq 0,$$

logo, pelo Teorema da Função Implícita, podemos concluir que M é o gráfico de uma função $y = f(x,z)$ de classe C^1 numa vizinhança do ponto $(\pi, 0, 0)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\pi, 0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0, 0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial z}(\pi, 0, 0) = 1.$$

(3 val.) 4. Mostre que a área do maior rectângulo que pode ser inscrito na elipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 1, \quad a, b > 0$$

é dada por $2/(ab)$.

Resolução: A área de um rectângulo inscrito na elipse com vértices nos pontos $(\pm x, \pm y)$, com $x, y > 0$, é dada pela função $f(x,y) = 4xy$. Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, devemos considerar a função

$$g(x,y) = 4xy + \lambda(a^2x^2 + b^2y^2 - 1)$$

e resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = 0 \\ a^2x^2 + b^2y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y + 2\lambda a^2 x = 0 \\ 4x + 2\lambda b^2 y = 0 \\ a^2x^2 + b^2y^2 = 1. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações podemos concluir que $a^2x^2 = b^2y^2$ e substituindo na última equação obtemos $x = \frac{1}{\sqrt{2}a}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}b}$. Portanto a maior área é dada por $2/(ab)$.

(3 val.) 5. Seja u uma função de classe C^2 definida no disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0.$$

Mostre que u tem um máximo em $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Resolução:

Como u é uma função contínua e D é um conjunto compacto sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que a função u tem máximo e mínimo absolutos em D. Os extremos no interior do disco correspondem a pontos de estacionaridade de u, que são classificados usando a matriz Hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz Hessiana é a soma dos valores próprios e neste caso sabemos, por hipótese que é positivo, portanto pelo menos um dos valores próprios é positivo. Logo não podemos ter um ponto de máximo no interior de D. Donde podemos concluir que o máximo pertence então à fronteira de D.