

Cálculo Diferencial e Integral II  
Teste 2 - 15 de Janeiro de 2011 - 9h - Versão 1  
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2, z > 1\}.$$

- (3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de  $D$  como uma soma de integrais iterados da forma  $\int (\int (\int dx) dy) dz$ .

**Resolução:** De  $z^2 < 2 - x^2 - y^2$  vemos que  $z < \sqrt{2}$ . Por outro lado, os cortes de  $z$  constante são dados pela condição  $x^2 + y^2 < 2 - z^2$ , ou seja, são círculos de raio  $\sqrt{2 - z^2}$ . Consequentemente, o volume de  $D$  é dado pelo integral iterado

$$V_3(D) = \int_1^{\sqrt{2}} \left( \int_{-\sqrt{2-z^2}}^{\sqrt{2-z^2}} \left( \int_{-\sqrt{2-z^2-y^2}}^{\sqrt{2-z^2-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz.$$

- (3 val.) (b) Calcule o volume de  $D$  utilizando coordenadas cilíndricas.

**Resolução:** Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$  o sólido é descrito pela condição  $\rho^2 + z^2 < 2$ . Recordando que o Jacobiano destas coordenadas é  $\rho$ , temos

$$V_3(D) = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho d\rho dz d\varphi = \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2 - z^2) dz = \frac{(4\sqrt{2} - 5)\pi}{3}.$$

- (3 val.) (c) Calcule a área da fronteira de  $D$ .

**Resolução:** A fronteira de  $D$  é formada por um círculo de raio 1, contido no plano  $z = 1$ , e por um pedaço  $S$  de superfície esférica. A área do círculo é obviamente  $\pi$ . Para calcularmos a área de  $S$  escolhemos a parametrização  $g : ]0, \frac{\pi}{4}[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada pelas coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$ :

$$g(\theta, \varphi) = \left( \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \sqrt{2} \cos \theta \right).$$

Para esta parametrização temos

$$\det(Dg^t Dg) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix} = 4 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Portanto

$$V_2(S) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(Dg^t Dg)} d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta = (4 - 2\sqrt{2}) \pi,$$

pelo que a área da fronteira de  $D$  vem

$$V_2(\partial D) = \pi + V_2(S) = (5 - 2\sqrt{2}) \pi.$$

2. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(1 val.) (a) O campo vectorial  $F(x, y) = (x + y, x - y)$  é um campo fechado.

**Resolução:** Verdadeira:  $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ .

(1 val.) (b) O campo vectorial  $F(x, y) = (x + y, x - y)$  é um campo gradiente.

**Resolução:** Verdadeira, uma vez que é um campo fechado cujo domínio ( $\mathbb{R}^2$ ) é simplesmente conexo.

(1 val.) (c) Todo o campo fechado em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  é gradiente.

**Resolução:** Falsa: por exemplo, o campo

$$R(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

é um campo fechado em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  mas não é gradiente (o seu integral ao longo da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  percorrida no sentido directo vale  $2\pi \neq 0$ ).

(1 val.) (d) Todo o campo fechado em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  é gradiente.

**Resolução:** Verdadeira, já que o conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  é simplesmente conexo.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (yz, -xz, z^2)$$

e a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z, 0 < z < 1 \right\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de  $G$ ,  $\text{rot } G$ , através de  $S$ , segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

(2 val.) (a) O Teorema de Stokes;

**Resolução:** De acordo com o Teorema de Stokes, temos

$$\int_S (\text{rot } G) \cdot n = \int_{\partial S} G \cdot dg.$$

O bordo de  $S$  é formado por duas circunferências  $C_0$  e  $C_1$ , de raios 1 e 2, contidas nos planos  $z = 0$  e  $z = 1$ . Uma vez que a normal pretendida é a que aponta para

longe do eixo dos  $zz$ ,  $C_0$  deve ser orientada no sentido directo (anti-horário) e  $C_1$  no sentido inverso (horário), quando vistas de cima. Usando as parametrizações  $g_0, g_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por

$$g_0(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad g_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 1)$$

(onde  $g_1$  induz a orientação contrária à pretendida) temos então

$$\begin{aligned} \int_S (\text{rot } G) \cdot n &= \int_{\partial S} G \cdot dg = \int_0^{2\pi} G(g_0(t)) \cdot \frac{dg_0}{dt}(t) dt - \int_0^{2\pi} G(g_1(t)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 0, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt - \int_0^{2\pi} (2 \sin t, -2 \cos t, 1) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4 dt = 8\pi. \end{aligned}$$

(2 val.)

(b) O Teorema da Divergência.

**Resolução:** Uma vez que o Teorema da Divergência só se aplica a superfícies que são fronteira de domínios regulares, acrescentamos à superfície  $S$  os círculos

$$T_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Em conjunto, as três superfícies formam a fronteira de um domínio regular  $D$ . Pelo Teorema da Divergência (notando que a normal indicada no enunciado coincide com a normal exterior) temos

$$\int_D \text{div}(\text{rot } G) = \int_S (\text{rot } G) \cdot n + \int_{T_1} (\text{rot } G) \cdot (0, 0, 1) + \int_{T_0} (\text{rot } G) \cdot (0, 0, -1).$$

Uma vez que  $\text{div}(\text{rot } G) = 0$  e

$$\text{rot } G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} = (x, y, -2z),$$

temos

$$0 = \int_S (\text{rot } G) \cdot n + \int_{T_1} (-2) + \int_{T_0} 0 \Leftrightarrow \int_S (\text{rot } G) \cdot n = 2V_2(T_1) = 8\pi.$$

- (3 val.) 4. Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vectorial de classe  $C^1$  ortogonal a  $M$  (ou seja,  $H(x) \in T_x^\perp M$  para todo o  $x \in M$ ). Mostre que  $\text{rot } H$  é um campo vectorial tangente a  $M$  em cada ponto.

**Resolução:** Se  $\text{rot } H$  não fosse tangente a  $M$  nalgum ponto  $x_0 \in M$  então teríamos  $(\text{rot } H)(x_0) \cdot n(x_0) > 0$  para uma certa normal unitária  $n$  localmente definida. Uma vez que  $H$  é de classe  $C^1$ , e portanto  $\text{rot } H$  é contínuo, existiria um aberto  $U \ni x_0$  tal que  $(\text{rot } H)(x) \cdot n(x) > 0$  para  $x \in U \cap M$ . Tomando uma curva simples fechada  $C \subset U \cap M$  teríamos então

$$\oint_C H \cdot dg = \int_M (\text{rot } H) \cdot n > 0,$$

sendo  $S \subset U \cap M$  a região em  $M$  com bordo  $C$ . Mas isto é uma contradição, uma vez que como  $H$  é ortogonal a  $M$  temos

$$\oint_C H \cdot dg = \int_a^b H(g(t)) \cdot \frac{dg}{dt}(t) dt = 0,$$

já que  $\frac{dg}{dt}(t)$  é tangente a  $M$  para qualquer parametrização  $g : [a, b] \rightarrow M$  de  $C$ . Concluímos que  $\text{rot } H$  tem que ser tangente a  $M$  em todos os pontos.