Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO A

2 de Junho de 2012 - das 9h00 às 10h30

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + xy\}$$

[2 v] (a) Mostre que S é uma variedade e calcule a sua dimensão.

[1 v] (b) Determine o espaço normal a S no ponto $(1, 1, 2)$.

[2 v] (c) Determine o ponto de S mais próximo da origem.

[3 v] 2. Mostre que a equação
$$\operatorname{sen}(x + y) + xy = 0$$
define y como função de x, ou seja $y = f(x)$, numa vizinhança do ponto $(\pi, 0)$ e calcule $f'(\pi)$.

3. Considere o campo vectorial
$$F(x, y, z) = \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + e^{x+y^2}, \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2y\, e^{x+y^2}, \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \right)$$

[1.5 v] (a) Mostre que F é gradiente no seu domínio de definição. Justifique a resposta.

[1.5 v] (b) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho $g(t) = (1 + t^2, 1 + t^6, t^{2012})$, $t \in [0, 1]$. Justifique detalhadamente a resposta.

4. Considere a superfície
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = y^2 + z^2\ ;\ 1 < x < 2\right\}$$
orientada com a normal unitária $n = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_x > 0$. Seja $G(x, y, z) = (2x, -y, -z)$.

Calcule o fluxo $\int_S G \cdot n$:

[3 v] (a) pela definição;

[3 v] (b) usando o Teorema da Divergência.

[3 v] 5. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular. Sejam ϕ e ψ campos escalares definidos num aberto A (com $\bar{D} \subset A$), tais que $\phi, \psi \in C^2(A)$. Mostre que:
$$\int_D (\phi\, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi) = \int_{\partial D} \phi\, \nabla\psi \cdot n$$
onde n é a normal unitária exterior a ∂D e onde $\Delta\psi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$.