Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste 1 - 18 de Abril de 2009 - 11h - Versão 2
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Estude f quanto à continuidade.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável.

(3 val.) (a) Supondo que a derivada de f no ponto $(1,2)$ na direcção do vector $(2,-2)$ é 6, e na direcção do vector $(1,1)$ é 1, mostre que $\nabla f(1,2) = (2,-1)$.

(2 val.) (b) Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função $g(x,y,z) = (1-x-z^2, 3-y-e^z)$. Determine $D(f \circ g)(0,0,0)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = x^2 + y^2 e^{-y^2}$.

(2 val.) 4. (a) Mostre que a equação $e^x + x = 1 + 2y^2 - 2yz + z^2$ define localmente x como função de y e z (isto é $x = f(y,z)$) numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$, onde f é uma função de classe C^1.

(2 val.) (b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$.

(2 val.) (c) Prove que f possui um mínimo local no ponto $(0,0)$.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável tal que $\nabla f(x,y) = 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.