Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 15 de Janeiro de 2011 - 9h - Versão 2

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2,\ 1 < z < 2\right\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A como uma soma de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$.

(3 val.) (b) Calcule o volume de A utilizando uma mudança de coordenadas apropriada.

(3 val.) (c) Calcule a área da fronteira de A.

2. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(1 val.) (a) O campo vectorial $F(x,y) = (x-y, x+y)$ é um campo fechado.

(1 val.) (b) O campo vectorial $F(x,y) = (x-y, x+y)$ é um campo gradiente.

(1 val.) (c) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ é gradiente.

(1 val.) (d) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$ é gradiente.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x,y,z) = (-x, -y, 2z)$$

e a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ 0 < z < 1\right\}.$$

Calcule o fluxo de G através de S, segundo a normal com terceira componente positiva, usando:

(2 val.) (a) O Teorema da Divergência;

(2 val.) (b) O Teorema de Stokes.

(3 val.) 4. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 ortogonal a M (ou seja, $H(x) \in T_x^{\perp} M$ para todo o $x \in M$). Mostre que $\operatorname{rot} H$ é um campo vectorial tangente a M em cada ponto.