

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 2 - 15 de Janeiro de 2011 - 9h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2, z > 1\}.$$

- (3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de D como uma soma de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.
- (3 val.) (b) Calcule o volume de D utilizando coordenadas cilíndricas.
- (3 val.) (c) Calcule a área da fronteira de D .

2. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

- (1 val.) (a) O campo vectorial $F(x, y) = (x + y, x - y)$ é um campo fechado.
- (1 val.) (b) O campo vectorial $F(x, y) = (x + y, x - y)$ é um campo gradiente.
- (1 val.) (c) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é gradiente.
- (1 val.) (d) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é gradiente.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (yz, -xz, z^2)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z, 0 < z < 1\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de G , $\text{rot } G$, através de S , segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

- (2 val.) (a) O Teorema de Stokes;
- (2 val.) (b) O Teorema da Divergência.

- (3 val.) 4. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 ortogonal a M (ou seja, $H(x) \in T_x^\perp M$ para todo o $x \in M$). Mostre que $\text{rot } H$ é um campo vectorial tangente a M em cada ponto.