Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - 7 de Junho de 2008 - Versão B
(Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC)
Duração: 1h30m
Apresente e justifique todos os cálculos

(3.5 val.) 1. Use um integral iterado da forma $\int(\int(\int \ dy)dz)dx$ para calcular a massa do sólido

$$Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x < 2 - y^2, \, 0 < z < 2 - x\right\},$$

supondo que a densidade de massa de Q é dada pela função $\sigma(x,y,z) = 4$.

(4 val.) 2. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a carga eléctrica do sólido

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 10, \ -1 < x < 2\},$$

com densidade de carga dada pela função $f(x,y,z) = x$.

(3.5 val.) 3. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x,y,z) = \left(x \, , \, y \, \cos(y^2+z^2) \, , \, z \, \cos(y^2+z^2)\right),$$

ao longo da curva

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - \frac{y^2}{\pi} = 1, \ z = 0, \ x \leq 2, y \geq 0\right\},$$

do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(2, \sqrt{\pi}, 0)$.

4. Considere a superfície

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = 1 + z^2 \, , \, x^2 + y^2 < 4\right\},$$

orientada com a normal unitária, n_M, tal que $n_M(1,0,0) = (-1,0,0)$.

(3 val.) a) Calcule o fluxo do campo $G(x,y,z) = \left(y^3, e^{x^2 z} + y, z - 1\right)$ através de M no sentido de n_M.

(3 val.) b) Calcule, usando o teorema de Stokes e o teorema da divergência, o trabalho realizado pelo campo $F(x,y,z) = (-y, x, x)$, ao longo do bordo ∂M de M, orientado no sentido induzido por n_M.

(3 val.) 5. Usando o teorema da divergência para um domínio regular $D \subset \mathbb{R}^2$ e para um campo vectorial, $f = (f_1, f_2)$, de classe C^1 num aberto que contém o fecho de D, ou seja

$$\int_{\partial D} f \cdot n = \iint_D \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

onde n é a normal unitária a ∂D que aponta para o exterior de D, prove o teorema de Green.