

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - 7 de Junho de 2008 - Versão A

(Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC)

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

- (3.5 val.) 1. Use um integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$ para calcular a carga eléctrica do sólido

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 3 - y, 0 < y < 3 - x^2\},$$

supondo que a densidade de carga de B é dada pela função $\sigma(x, y, z) = -3$.

- (4 val.) 2. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 5, 0 < y < 2\},$$

com densidade de massa dada pela função $f(x, y, z) = 2 - y$.

- (3.5 val.) 3. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x, y, z) = (z \cos(xz), y, x \cos(xz)),$$

ao longo da curva

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, z = 0, y \geq 0, x \geq 0 \right\},$$

do ponto $(3, 0, 0)$ ao ponto $(0, 1, 0)$.

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z^2, x^2 + y^2 > 1\},$$

orientada com a normal unitária, n_S , tal que $n_S(2, 0, 0) = (-1, 0, 0)$.

- (3 val.) a) Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x + \sin(y^2 + z^2), y, z + 1)$ através de S no sentido de n_S .

- (3 val.) b) Calcule, usando o teorema de Stokes e o teorema da divergência, o trabalho realizado pelo campo $G(x, y, z) = (2y, x, y)$, ao longo do bordo ∂S de S , orientado no sentido induzido por n_S .

- (3 val.) 5. Usando o teorema de Green, prove o teorema de divergência para um domínio regular $D \subset \mathbb{R}^2$ e para um campo vectorial, $f = (f_1, f_2)$, de classe C^1 num aberto que contém o fecho de D , ou seja

$$\int_{\partial D} f \cdot n = \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right),$$

onde n é a normal unitária a ∂D que aponta para o exterior de D .