**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste 1 - 19 de Abril de 2008 - 9h - Versão 2
Duração: 90 minutos

**Apresente e justifique todos os cálculos**

(3 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^2}{3x^2-y^3}.$$

(3 val.) 2. Seja $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$ tal que $\nabla h(\pi^2,0,1)=(\frac{1}{2},0,1)$ e seja

$$g(x,y)=(x^2+y^2,\operatorname{sen}(x+y),e^{xy}).$$

Calcule a derivada de $h\circ g$ no ponto $(\pi,0)$ segundo o vector $v=(1,-1)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y)=y^3-2x^2+4xy$.

4. Considere a variedade $E\subset\mathbb{R}^3$ definida por

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+3y^2+2z^2-6=0\}.$$

(3 val.) a) Determine o espaço tangente a $E$ no ponto $(1,1,1)$.

(3 val.) b) Justifique que, numa vizinhança do ponto $(1,1,1)\in E$, é possível descrever $E$ como o gráfico de uma função de classe $C^1$ da forma $x=\phi(y,z)$. Calcule $D\phi(1,1)$.

(2 val.) 5. De todas as latas cilíndricas (com fundo e sem tampa) com área $1m^2$, determine a que tem volume máximo.

(3 val.) 6. Demonstre o Teorema da Função Inversa a partir do Teorema da Função Implícita.