Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 8 de Novembro de 2008 - 11h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

(3 val.) 1. Considere a função

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se h é contínua na origem.

2. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \sin(x^2 - y) + e^{yz}$.

(2 val.) a) Calcule a derivada de f segundo o vector $(1,2,3)$ no ponto $(-1,1,0)$.

(2 val.) b) Calcule o gradiente de $f \circ g$ no ponto $(1,1)$, onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $g(1,1) = (-1,1,0)$ e g é diferenciável no ponto $(1,1)$ com matriz derivada

$$Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x^3 + x - 3y - 5, y + z^2)$.

(2 val.) a) Mostre que o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}$ é uma variedade, e determine a sua dimensão.

(2 val.) b) Determine o espaço normal a M no ponto $(1,-1,1)$ e indique um elemento não-nulo do espaço tangente a M no mesmo ponto.

(3 val.) c) Justifique que numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, a variedade pode ser descrita na forma $x = f_1(y)$ e $z = f_2(y)$, com f_1, f_2 funções de classe C^1, definidas numa vizinhança do ponto $y = -1$. Calcule $f_1'(-1)$ e $f_2'(-1)$.

(3 val.) 4. Determine os valores máximo e mínimo da função $g(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)} - z^2$ no conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função limitada (não necessariamente contínua). Mostre que

$$h(x,y) = x + y + (x^2 + y^2) f(x,y)$$

é diferenciável na origem e calcule $\nabla h(0,0)$. Dê um exemplo de uma função f tal que h não seja contínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$.