Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 7 de Novembro de 2009 - 11h - Versão 2
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^7+y^7}{x^6+y^6}.$$

(3 val.) 2. Sejam $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ as funções

$$f(x,y,z)=e^{xy+z}-1 \quad \text{e} \quad g(t)=(\log(1-t),\cos t,t^4).$$

Calcule $D(f\circ g)(0)$ e $D(g\circ f)(0,1,0)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade do campo escalar $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definido por

$$h(x,y,z)=2x^2+2xy+2y^2-z^2+6z+2x-2y.$$

4. Considere o conjunto

$$L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2=y \ \text{ e } \ y-2=z\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a L no ponto $(0,1,-1)$.

(3 val.) (c) Determine o ponto de L mais próximo da origem.

(2 val.) (d) Mostre que L é o gráfico de uma função $(y,z)=f(x)$ numa vizinhança do ponto $(0,1,-1)$ e calcule $f'(0)$.

(3 val.) 5. Seja $M\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $x\in\mathbb{R}^n\setminus M$. Mostre que existe um ponto $y\in M$ cuja distância a x é mínima. Mostre ainda que se M é uma variedade então a recta que contém x e y é normal a M em y.