Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 6 de Novembro de 2010 - 13h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x^3 y}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(3 val.) (a) Diga, justificadamente, se f é contínua na origem.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(3 val.) 2. Considere a função $h(x,y) = (x^3 + xy^2, \log(xy))$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(2,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada de $g \circ h$ no ponto $(1,1)$ segundo o vector $v = (0,1)$.

3. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^y + \cos(x+y)\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(\pi, 0, 0)$.

(3 val.) (c) Mostre que M é o gráfico de uma função $y = f(x,z)$ numa vizinhança do ponto $(\pi, 0, 0)$ e calcule $\frac{\partial f}{\partial z}(\pi, 0)$.

(3 val.) 4. Mostre que a área do maior rectângulo que pode ser inscrito na elipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 1, \quad a, b > 0$$

é dada por $2/(ab)$.

(3 val.) 5. Seja u uma função de classe C^2 definida no disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0.$$

Mostre que u tem um máximo em $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.