Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXCEPTO MEBIOM, MEFT, LMAC, MEEC E MEAMB
TESTE 2 – 15 DE JUNHO DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS – VERSÃO 2

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) (1) (a) Mostre que a região

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1\},$$

é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine um vector tangente (não nulo) a A no ponto $(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3})$.

(2 val.) (c) Determine, caso existam, os extremos da função $f(x, y, z) = x + y$ na variedade A.

(2) Seja

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{9 - 8(x^2 + y^2)}, x \ge 0, y \ge 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de B na forma $\int \left(\int \left(\int \dots dx\right) dy\right) dz$

(2 val.) (b) Calcule a massa de B, supondo que a densidade de massa é $\sigma(x, y, z) = z$.

(3) Considere os seguintes campos vectoriais: $G(x, y) = (4\cos(2x + y^2), 4y\cos(2x + y^2))$ e
$H(x, y) = \left(\frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2}, \frac{x}{x^2+(y-1)^2}\right)$ e seja E o quadrado com vértices $(1, 0), (1, 2), (-1, 2), (-1, 0)$, percorrido no sentido horário.

(1 val.) (a) Calcule $\oint_E G \cdot dg$.

(1 val.) (b) Calcule $\oint_E H \cdot dg$.

(4) Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 3 - (x^2 + y^2)^2, z > 2\},$$

orientada com normal unitária, n_M, com terceira componente negativa.

(3 val.) (a) Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (e^{y^2}, e^{x^2+3z}, 2)$ através de M.

(2 val.) (b) Calcule, usando o teorema de Stokes, o trabalho do campo $G = (0, x, 0)$ pela fronteira (bordo) ∂M de M, percorrida no sentido induzido por n_M.

(3 val.) (5) Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto regular e $\psi, \sigma \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$. Mostre, usando o teorema da divergência, a seguinte identidade

$$\iiint_U (\psi \ \triangle\sigma - \sigma \ \triangle\psi) \ dxdydz = \iint_{\partial U} (\psi \ \frac{\partial\sigma}{\partial n} - \sigma \ \frac{\partial\psi}{\partial n}),$$

onde n é a normal unitária exterior de ∂U e $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.