Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXCEPTO MEBIOM, MEFT, LMAC, MEEC E MEAMB
TESTE 2 – 15 DE JUNHO DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS – VERSÃO 1

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) (1) (a) Mostre que a região

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\},$$

é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine um vector tangente (não nulo) a M no ponto $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(2 val.) (c) Determine, caso existam, os extremos da função $f(x, y, z) = x + y$ na variedade M.

(2) Seja

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - 3(x^2 + y^2)}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de D na forma $\int \left(\int \left(\int \ldots dx\right) dy\right) dz$

(2 val.) (b) Calcule a massa de D, supondo que a densidade de massa é $\sigma(x, y, z) = z$.

(3) Considere os seguintes campos vectoriais: $H(x, y) = (4xe^{x^2+3y}, 6e^{x^2+3y})$ e $G(x, y) = \left(\frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}, (\frac{-(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)$ e seja C o quadrado com vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$, percorrido no sentido horário.

(1 val.) (a) Calcule $\oint_C H \cdot dg$.

(1 val.) (b) Calcule $\oint_C G \cdot dg$.

(4) Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 + (x^2 + y^2)^2, z < 2\},$$

orientada com normal unitária, n_S, com terceira componente positiva.

(3 val.) (a) Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (e^{y^2}, e^{x^2+3z}, 2)$ através de S.

(2 val.) (b) Calcule, usando o teorema de Stokes, o trabalho do campo $G = (y, 0, 0)$ pela fronteira (bordo) ∂S de S, percorrida no sentido induzido por n_S.

(3 val.) (5) Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto regular e $\varphi, \psi \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$. Mostre, usando o teorema da divergência, a seguinte identidade

$$\iiint_D (\varphi \bigtriangleup\psi - \psi \bigtriangleup\varphi) \, dxdydz = \iint_{\partial D} (\varphi \, \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \, \frac{\partial \varphi}{\partial n}),$$

onde n é a normal unitária exterior de ∂D e $\bigtriangleup f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.