Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 06 de Janeiro de 2014 - **16h00 (versão 2)**
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xz + z^2 + y^2 = 1\}$.

(1 val.) a) Mostre que S é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) b) Determine o espaço normal a S no ponto $(0,1,0)$.

(2 val.) c) Determine os extremos da função $f(x,y,z) = x^2 + z^2$ em S.

(2 val.) 2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} u = y^2 - x^2 \\ v = x^2 - xy + y^2. \end{cases}$$

define implicitamente (x,y) como função de (u,v), em alguma vizinhança do ponto $(x,y,u,v) = (1,0,-1,1)$. Calcule $\frac{\partial y}{\partial v}(-1,1)$.

(2 val.) 3. Considere o campo vectorial $G(x,y) = \left(-\frac{2y}{x^2+y^2} + e^x, \frac{2x}{x^2+y^2} + e^y\right)$.

Calcule o trabalho realizado por G ao longo da elipse definida por $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, percorrida uma vez no sentido horário.

4. Considere a superfície

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2+z^2} = 2 - x \; ; \; 0 < x < 1\}$$

orientada com a normal n que tem a primeira componente positiva.

(2 val.) a) Calcule a área de M.

(3 val.) b) Sendo $F(x,y,z) = (1 - x, e^{x^2+z^2} + 2y, \operatorname{sen}(xy) - z)$ calcule o fluxo de F através da superfície M no sentido da normal n.

(2 val.) c) Sendo $G(x,y,z) = (x^2, 0, -2xz)$ determine um campo vectorial B da forma $B = (0, B_2, B_3)$ tal que $\operatorname{rot} B = G$.

(2 val.) d) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial G através de M no sentido da normal n.

(3 val.) 5. Seja $H : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) \; : \; z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial fechado e C a circunferência definida pelas equações $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$. Sabendo que o integral de linha

$$\oint_C H \cdot dg = b, \quad \text{com } b \in \mathbb{R},$$

onde C é percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,1)$, determine, justificadamente, todos os valores possíveis para o integral de linha $\oint_\Gamma H \cdot dg$ onde Γ é uma curva regular fechada contida na superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$.