

## Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 06 de Janeiro de 2014 - 16h00 (versão 1)

Duração: 90 minutos

### Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1\}$ .

(1 val.)

a) Mostre que  $M$  é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.)

b) Determine o espaço tangente a  $M$  no ponto  $(0, 0, 1)$ .

(2 val.)

c) Determine os extremos da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$  em  $M$ .

(2 val.)

2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} u = x^2 + xy + y^2 \\ v = x^2 - y^2. \end{cases}$$

define implicitamente  $(x, y)$  como função de  $(u, v)$ , em alguma vizinhança do ponto

$(x, y, u, v) = (0, 1, 1, -1)$ . Calcule  $\frac{\partial x}{\partial u}(1, -1)$ .

(2 val.)

3. Considere o campo vectorial  $F(x, y) = \left( \cos x + \frac{y}{x^2 + y^2}, \cos y - \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ .

Calcule o trabalho realizado por  $F$  ao longo da elipse definida por  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ , percorrida uma vez no sentido anti-horário.

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}; 0 < y < 1\}$$

orientada com a normal  $n$  que tem a segunda componente positiva.

(2 val.)

a) Calcule a área de  $S$ .

(3 val.)

b) Sendo  $F(x, y, z) = (\cos(yz) - 2x, y - 1, z + e^{xy})$  calcule o fluxo de  $F$  através da superfície  $S$  no sentido da normal  $n$ .

(2 val.)

c) Sendo  $H(x, y, z) = (0, y^2, -2yz)$  determine um campo vectorial  $A$  da forma  $A = (A_1, A_2, 0)$  tal que  $\text{rot } A = H$ .

(2 val.)

d) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial  $H$  através de  $S$  no sentido da normal  $n$ .

(3 val.)

5. Seja  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vectorial fechado e  $\Gamma$  a circunferência definida pelas equações  $x^2 + y^2 = 4$  e  $z = 0$ . Sabendo que

$$\oint_{\Gamma} F \cdot dg = a, \quad \text{com } a \in \mathbb{R},$$

onde  $\Gamma$  é percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto  $(0, 0, 1)$ , determine, justificadamente, todos os valores possíveis para o integral de linha  $\oint_C F \cdot dg$  onde  $C$  é uma curva fechada regular contida na superfície  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ .