

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 2 - 06 de Janeiro de 2014 - **14h00 (versão 2)**
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2 ; x^2 + xy + y^2 = 3\}$$

- (1 val.) a) Mostre que S é uma variedade e determine a respectiva dimensão.
- (1 val.) b) Determine o espaço normal a S no ponto $(1, 1, 0)$.
- (2 val.) c) Determine o ponto de S que apresenta menor coordenada y .
- (2 val.) 2. Mostre que a equação $x^2 + 2y + \sin(y^2 - x^2) + 3z = 6$ define implicitamente y como função de (x, z) , em alguma vizinhança do ponto $(0, 0, 2)$. Calcule $\frac{\partial y}{\partial z}(0, 2)$.

- (2 val.) 3. Considere o campo vectorial $G(x, y) = \left(\frac{x}{2+x^2} - 3y, \frac{y}{3+y^2} + x \right)$.

Calcule o trabalho realizado por G ao longo do losango definido por $\frac{|x|}{2} + |y| = 1$, percorrido uma vez no sentido anti-horário.

4. Seja $F(x, y, z) = (2x + 4, y, z)$ e considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = x + 2 ; -1 < x < 2\}$$

orientada com a normal n que tem a primeira componente negativa.

- (3 val.) a) Calcule o fluxo $\int_M F \cdot n$ pela definição.
- (3 val.) b) Calcule o fluxo $\int_M F \cdot n$ pelo Teorema da Divergência.
- (3 val.) c) Sendo $H(x, y, z) = (e^{x^2+y^2}, -z, y)$ calcule o fluxo de $\text{rot } H$ através da superfície M , no sentido da normal n .
- (3 val.) 5. Seja $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, -1), (1, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vectorial fechado e $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ as circunferências definidas pelas equações $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, respectivamente. Sabendo que

$$\oint_{\Gamma_1} G \cdot dg_1 = c_1, \quad \oint_{\Gamma_2} G \cdot dg_2 = c_2 \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

onde as curvas Γ_1 e Γ_2 são percorridas uma vez no sentido anti-horário, determine, justificadamente, todos os valores possíveis para o integral de linha $\oint_C G \cdot dg$ onde C é uma curva regular fechada contida no domínio de F .