

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 06 de Janeiro de 2014 - 14h00 (versão 1)

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 ; x^2 - xy + y^2 = 3\}$$

(1 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(1, -1, 0)$.

(2 val.) c) Determine o ponto de M que apresenta maior coordenada x .

(2 val.) 2. Mostre que a equação $3x - y^2 + \cos(x^2 - y) + 2z = 3$ define implicitamente x como função de (y, z) , em alguma vizinhança do ponto $(0, 0, 1)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial z}(0, 1)$.

(2 val.) 3. Considere o campo vectorial $F(x, y) = \left(-y + \frac{x}{1+x^2}, 2x - \frac{y}{1+y^2}\right)$.

Calcule o trabalho realizado por F ao longo do losango definido por $|x| + \frac{|y|}{2} = 1$, percorrido uma vez no sentido horário.

4. Seja $F(x, y, z) = (x, 2y + 2, z)$ e considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 + y ; 0 < y < 3\}$$

orientada com a normal n que tem a segunda componente negativa.

(3 val.) a) Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$ pela definição.

(3 val.) b) Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$ pelo Teorema da Divergência.

(3 val.) c) Sendo $G(x, y, z) = (z, \sin(yx), -x)$ calcule o fluxo de $\text{rot } G$ através da superfície S , no sentido da normal n .

(3 val.) 5. Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, -1), (1, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vectorial fechado e $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ as circunferências definidas pelas equações $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, respectivamente. Sabendo que

$$\oint_{C_1} F \cdot dg_1 = b_1, \quad \oint_{C_2} F \cdot dg_2 = b_2 \quad \text{com } b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

onde as curvas C_1 e C_2 são percorridas uma vez no sentido anti-horário, determine, justificadamente, todos os valores possíveis para o integral de linha $\oint_C F \cdot dg$ onde C é uma curva regular fechada contida no domínio de F .