

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 1 - 9 de Abril de 2011 - 9h - Versão 2
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

(3 val.) 1. Considere a função

$$h(x, y) = \begin{cases} 2 - \frac{y^3(x^2+y^2)}{x^4+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que h é contínua na origem.

2. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.

(1,5 val.) (a) Determine um vector $v \in \mathbb{R}^3$, não nulo, tal que a derivada de f segundo v no ponto $(1, 1, 1)$ seja 0.

(2 val.) (b) Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $\alpha(1) = (1, 1, 1)$ e $\alpha'(1) = (3, 2, 1)$. Calcule $(f \circ \alpha)'(1)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos de $g(x, y) = (1 + x^2)e^{y^2}$.

4. Considere o conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^x + e^y + z = 3; x - z + 1 = 0\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

(2 val.) (b) Mostre que L é o gráfico de uma função $f(y) = (x(y), z(y))$, de classe C^1 , numa vizinhança do ponto $(0, 0, 1)$ e calcule $x'(0)$.

(2,5 val.) 5. Determine o vector de \mathbb{R}^3 cujo comprimento é igual a 3 e cuja soma das componentes é a maior possível.

(2 val.) 6. Determine um ponto da superfície $z = 2 - xy$ para o qual a recta normal à superfície nesse ponto passa na origem.

(2 val.) 7. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^n$ duas variedades com $\dim M = m$, $\dim N = k$ e tal que para todo o $p \in M \cap N \neq \emptyset$ se tem $(T_p M)^\perp \cap (T_p N)^\perp = \{0\}$. Mostre que $M \cap N$ é uma variedade, determine a sua dimensão e determine o espaço tangente $T_p(M \cap N)$.