**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste 1 - 18 de Abril de 2009 - 11h - Versão 1
Duração: 90 minutos

**Resolução abreviada**

1. Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estude $f$ quanto à continuidade.
   **R:** A função $f$ é claramente contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (é obtida a partir de funções contínuas por operações elementares). Estudamos agora $f$ na origem. Dado que $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1,\ \forall z \in \mathbb{R}$, então

$$\left|(x+y)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| = |(x+y)^3| \,.\, \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq |x+y|^3.$$

   Logo
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

   Assim, por definição, $f$ é contínua na origem.

   (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   **R:** Por definição

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0 \end{aligned}$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável.

   (a) Supondo que a derivada de $f$ no ponto $(2,4)$ na direcção do vector $(1,1)$ é 5, e na direcção do vector $(-1,2)$ é 4, mostre que $\nabla f(2,4) = (2,3)$.
   **R:** Denotemos $\nabla f(2,4) = (a,b)$ e vejamos que $a = 2$ e $b = 3$. Por hipóteses

$$D_{(1,1)} f(2,4) = 5 \quad \text{e} \quad D_{(-1,2)} f(2,4) = 4. \tag{1}$$

Por sua vez, como $f$ é diferenciável tem-se que

$$D_{(1,1)}f(2,4) = (a,b)\cdot(1,1), \quad D_{(-1,2)}f(2,4) = (a,b)\cdot(-1,2). \tag{2}$$

Assim de (1) e (2)

$$a+b=5 \quad \text{e} \quad -a+2b=4,$$

donde $a=2$ e $b=3$.

(b) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função $g(t)=f(t,t^2)$. Justifique que $g$ é diferenciável e determine $g'(2)$.

**R:** A função $g$ é a composição de $f$ e $h(t)=(t,t^2)$, $t\in\mathbb{R}$. Dado que $f$ e $h$ são diferenciáveis, $g$ é também diferenciável pelo teorema da função composta. Além disso, deste teorema segue-se que

$$g'(t) = \nabla f(t,t^2)\cdot(1,2t), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Em particular, atendendo a $a)$

$$g'(2) = \nabla f(2,4)\cdot(1,4) = (2,3)\cdot(1,4) = 14.$$

3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y)=x^2e^{-x^2}-y^2$.

**R:** Calculemos os pontos de estacionaridade de $f$, isto é, os pontos onde o gradiente de $f$ é nulo. Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(1-x^2)\,e^{-x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Assim

$$\begin{aligned} 2x(1-x^2)\,e^{-x^2} &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned}$$

se e somente se $y=0$ e $x=\pm1$.

(a) Classifiquemos para começar o ponto $(0,0)$. Para tal calculamos a matriz Hessiana de $f$ num ponto genérico

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2e^{-x^2}(1-4x^2+2x^4) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Em particular

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ & \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo $(0,0)$ é um ponto de sela de $f$ (dado que os valores própios de $H_f(0,0)$ têm sinal oposto).

(b) Classificação do ponto $(1,0)$. Neste caso:

$$H_f(1,0) = \begin{bmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ & \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo $(1,0)$ é um ponto de máximo local para $f$ (dado que os valores própios de $H_f(1,0)$ são negativos).

(c) Classificação do ponto $(-1,0)$. Como

$$H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ & \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

então $(-1,0)$ é também um ponto de máximo local para $f$.

4. (a) Mostre que a equação $y + y^3 = x^2 + 2xz + 2z^2$ define localmente $y$ como função de $x$ e $z$ (isto é $y = f(x,z)$) numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$, onde $f$ é uma função de classe $C^1$.

**R:** Aplicamos o teorema da função implícita à função

$$F(x,y,z) = y + y^3 - x^2 - 2xz - 2z^2.$$

Temos que $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $F(0,0,0) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)|_{(0,0,0)} = [1 + 3y^2]|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0,$$

logo existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ de $(0,0,0)$, uma vizinhança $U$ de $(0,0)$ e uma função $f \in C^1(U)$ tal que

$$\{(x,y,z) \in V : \;\; F(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in R^3 : \;\; f(x,z) = y, \;\; (x,z) \in U\}.$$

(b) Calcule a derivada de $f$ no ponto $(0,0)$.

**R:** Dado que em particular em cada ponto $(x,z) \in U$

$$F(x, f(x,z), z) = 0$$

ou equivalentemente

$$f(x,z) + f(x,z)^3 - x^2 - 2xz - 2z^2 = 0$$

então (derivando em relação a $x$ e a $z$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,z) - 2x - 2z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) - 2x - 4z = 0$$

Em particular se $(x,y) = 0$ e dado que $f(0,0) = 0$ segue-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = 0$.

(c) Prove que $f$ possui um mínimo local no ponto $(0,0)$.
**R:** Calculemos a matriz Hessiana de $f$ no ponto $(0,0)$. Para tal voltamos a derivar o sistema obtido acima. Assim para cada ponto $(x,z) \in U$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,z) + 6f(x,z)^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\right]^2 + 3f(x,z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,z) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,z) + 6f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,z) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,z) + 6f(x,z)^2\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\right]^2 + 3f(x,z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,z) - 4 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,z) + 6f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,z) - 2 = 0$$

Em particular se $(x,y) = 0$, dado que $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = 0$, então[1]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(0,0),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4.$$

Assim

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Os valores própios de $H_f(0,0)$ são $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$. como ambos são positivos, $(0,0)$ é um ponto de mínimo local.

[1] $f$ é de facto $C^\infty$ por sê-lo $F$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável tal que $\nabla f(x, y) = 0$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que $f$ é constante.

**R:** Bastará provar que $f(p) = f(q)$ para todos os $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dados $p, q \in \mathbb{R}^2$ pelo Teorema de Lagrange (ou Teorema do valor médio) existe $c \in \,]p, q[$ (segmento que une $p$ e $q$) tal que

$$f(q) - f(p) = \nabla f(c) \cdot (q - p).$$

Por hipóteses $\nabla f(c) = 0$, logo $f(p) = f(q)$.