Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 09 de Novembro de 2013 - 08h00

Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

Resolução: Usando as propriedades das funções contínuas f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Por outro lado

$$\left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|x|y^2}{|x|} = |y|^2 \leq ||(x,y)||^2 \to 0$$

e, portanto, f é contínua na origem. Assim, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(1 val.) b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

(3 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = f(2x+y^2, x+y)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $Df(0,0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada de g segundo o vector $v = (1,2)$ na origem, $D_v g(0,0)$.

Resolução: Definindo $h(x,y) = (2x+y^2, x+y)$, tem-se

$$D_v g(0,0) = Df(0,0)Dh(0,0)v = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 18.$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{2}{x} + x^3 y - xy.$$

Resolução: Os pontos críticos de f são as soluções de $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{2}{x^2} + 3x^2 y - y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2} + 3x^2 y - y = 0 \\ \\ x(x^2-1) = 0 \end{cases}$$

Sendo $x \neq 0$, os pontos críticos são $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.

Para classificar os pontos críticos recorre-se à matriz hessiana

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{x^3} + 6xy & 3x^2 - 1 \\ & \\ 3x^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notando que nos pontos críticos se tem $x^2 = 1$, conclui-se que $\det H(-1,1) = \det H(1,1) = -4$, ou seja, os valores próprios da matriz hessiana apresentam sinais contrários. Assim, nenhum dos pontos críticos é ponto de extremo de f, ou seja, são pontos de sela.

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 \; ; \; 0 < y < 1 \; ; \; 0 < z < x^2 + y^2\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} 1 \, dz \right) dy \right) dx \quad \text{e} \\ \text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 1 \, dx \right) dy \right) dz + \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{z}}^1 \left(\int_0^1 1 \, dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{z-1}}^1 \left(\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 1 \, dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

(2 val.) b) Calcule a massa de S sabendo que a função densidade de massa é dada por

$$\sigma(x,y,z) = y.$$

Resolução: A massa de S é dada pelo integral

$$\int_S \sigma = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} y \, dz \right) dy \right) dx = \frac{5}{12}.$$

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+z^2} < y < 2 - x^2 - z^2 \; ; \; x > 0\}.$$

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, y) temos $(x = \rho\cos\theta, y = y, z = \rho \operatorname{sen}\theta)$ e:

$$\text{vol}(B) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(\int_\rho^{2-\rho^2} \rho \, dy \right) d\rho \right) d\theta = \frac{5\pi}{12}.$$

(3 val.) 6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{e} \quad f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se f é diferenciável na origem.

Resolução: f é diferenciável na origem sse f_1 e f_2 são diferenciáveis na origem e f_i, com $i = 1, 2$, é diferenciável na origem sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_i(x,y) - f_i(0,0) - \nabla f_i(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Temos, para $i = 1$,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Assim obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_i(x,y) - f_i(0,0) - \nabla f_i(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Como

$$\left| \frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^4}{x^2+y^4} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0,$$

concluimos que este limite é 0 na origem e logo f_1 é diferenciável na origem. De forma análoga podemos concluir que f_2 é diferenciável na origem e portanto f é diferenciável na origem.