Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Exame - 25 de Janeiro de 2010

Duração: 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função
$$f(x,y) = xy + x - y.$$

(1.0 val.) (a) Justifique que f é diferenciável no seu domínio, e calcule $Df(x,y)$.

(1.0 val.) (b) Mostre a partir da definição que f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

(1.5 val.) (c) Calcule $\frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)(1,0,1)$, onde $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é a função
$$g(u,v,w) = \left(ue^v + vw - 1, \frac{u}{w} + v - 2w + 1\right).$$

(1.0 val.) (d) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de f.

(1.0 val.) (e) Será que f possui curvas de nível que são a fronteira de uma região limitada? Justifique.

2. Considere o conjunto
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6\}.$$

(1.0 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1.0 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a M no ponto $(1,1,1)$.

(1.0 val.) (c) Mostre que M é o gráfico de uma função $z = f(x,y)$ numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$ e calcule $Df(1,1)$.

(1.5 val.) (d) Justifique que a função $g(x,y,z) = 6x - 4y + 2z$ possui máximo e mínimo sobre M, e determine-os.

(1.5 val.) 3. Considere o conjunto
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z > 1\ ;\ x + y < 1\ ;\ x > 0\ ;\ y > 0\ ;\ 0 < z < 2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(1.5 val.) 4. Considere o sólido
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 < 1\ ;\ 0 < z < 2 - \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ y > 0\},$$

com densidade de massa constante igual a um. Calcule o momento de inércia de B relativo ao eixo Oz.

(1.5 val.) 5. Calcule a massa da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} = x^2 + 1 \; ; \; 0 < x < 1\},$$

sabendo que a densidade de massa é dada pela função $\sigma(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$.

(1.5 val.) 6. Calcule o trabalho do campo $F(x, y, z) = (2x, z\cos(yz), y\cos(yz))$ ao longo do caminho $g(t) = (e^t \cos t, e^{t^2} \operatorname{sen} t, \cos t), \quad t \in [0, \pi]$.

(2.0 val.) 7. Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo $G(x, y, z) = (-x, -2yz, z^2 + z)$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \; ; \; 1 < z < 2\},$$

orientada com a normal com terceira componente negativa.

(2.0 val.) 8. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ uma região limitada por uma curva regular simples C e

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

uma aplicação de classe C^2, injectiva, tal que $\det DG > 0$. Use o teorema de Green para demonstrar o seguinte caso particular da fórmula de mudança de coordenadas:

$$\int\int_{G(U)} dxdy = \int\int_U \det DG \, dudv.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

Sugestão: Seja $G(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$. Comece por mostrar que o trabalho do campo vectorial $a(x, y) = (0, x)$ ao longo de $G(C)$ é igual ao trabalho do campo vectorial $b(u, v) = (f\,\frac{\partial g}{\partial u}, f\,\frac{\partial g}{\partial v})$ ao longo de C.