Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os Cursos

Teste de Recuperação/Exame (Versão 2) - 29 de Janeiro de 2011 - 9h

Duração do Teste: 90 minutos   Duração do Exame: 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1^0Teste

(1.5 val.) 1. Sendo $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^4}$, determine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2. Seja $h(x,y) = x^2 - 2y^2$.

(1.5 val.) a) Dada $g(u,v) = \left(e^u, \frac{1}{v}\right)$, calcule $D(h\circ g)(0,1)$ usando a regra da derivação composta.

(1.5 val.) b) Classifique os extremos de h em $\mathbb{R}^2$.

(1.5 val.) c) Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos de h na região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(1 val.) d) Determine os valores de $K \in \mathbb{R}$ para os quais, numa vizinhança de $(1,0)$, a equação $h(x,y) = Kx$ define implicitamente uma função $x = x(y)$ de classe C^1.

(1.5 val.) 3. Justifique que o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3, \ z = x^2\}$$

é uma variedade em $\mathbb{R}^3$ e indique a sua dimensão.

4. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(0.25 val.) a) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em $(0,0)$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(0.25 val.) b) O vector $(1,0)$ dá a direcção de maior crescimento da função $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

(1 val.) c) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$, e se, para todo o x e para todo o y, existirem os limites unidimensionais

$$\lim_{x\to a} h(x,y), \quad \lim_{y\to b} h(x,y)$$

então

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} h(x,y)\right] = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} h(x,y)\right] = L.$$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os Cursos

Teste de Recuperação/Exame (Versão 2) - 29 de Janeiro de 2011 - 9h

Duração do Teste: 90 minutos   Duração do Exame: 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

2^0 Teste

1. Considere a região $B \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(1.5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de B da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} dx \right) dy \right) dz.$$

(1.5 val.) b) Calcule o volume de B.

2. Considere a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\alpha(t) = (t, \cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

(1 val.) a) Calcule o comprimento de C.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho do campo vectorial

$$h(x, y, z) = \left(5, \frac{-3z}{y^2 + z^2}, \frac{3y}{y^2 + z^2} \right)$$

ao longo de C.

3. Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ a superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2,\ 0 < z < 1\},$$

orientada com a normal unitária n, com a terceira componente positiva.

(1.5 val.) a) Seja $H(x, y, z) = (-y, x, z + 1)$. Calcule o fluxo do rotacional de H, $\operatorname{rot} H$, através de A no sentido de n.

(1.5 val.) b) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (2x + e^y, 2y, 0)$ através de A no sentido de n.

(1.5 val.) 4. O teorema da divergência em $\mathbb{R}^2$ afirma que se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio regular, com normal exterior unitária n, e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe C^1, então

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} F \cdot n.$$

Mostre que este teorema é equivalente ao teorema de Green.