

Teorema de Fubini e Mudança de Variáveis (Resolução Sumária)

9 de Abril de 2019

1. Escreva $\int_A f dV_2$ como um integral iterado nas duas ordens de integração possíveis, onde o conjunto A é:

(a) O triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(2, 1)$;

Resolução:

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{x-1}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{2y}^{y+1} f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

(b) O sector circular com centro em $(0, 0)$ e cujo arco é o menor arco circular unindo os pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$;

Resolução:

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_0^1 \int_{-x}^x f(x, y) dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{|y|}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

(c) A região compreendida entre as circunferências de raios 1 e 2 centradas na origem.

Resolução:

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx\end{aligned}$$

(a outra ordem de integração é completamente análoga).

2. Escreva $\int_A f dV_3$ como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha, onde o conjunto A é:

(a) O tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$;

Resolução: Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx.$$

(b) A esfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;

Resolução: Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$$

(c) O cone $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

Resolução: Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dy dx.$$

3. Escreva o volume do sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha.

Resolução: Por exemplo,

$$\begin{aligned} V_3(A) &= \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{1-z^2-x^2}} 1 dy dx dz + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1 dy dx dz. \end{aligned}$$

4. Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais iterados:

(a) $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy dx;$

Resolução: $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y) dx dy.$

(b) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy dx;$

Resolução: $\int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx dy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^1 f(x, y) dx dy.$

(c) $\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy dx;$

Resolução:

$$\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{4}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx dy + \int_1^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{y^2}{4}}^2 f(x, y) dx dy$$

5. Calcule o volume de um cone circular recto de altura $h > 0$ e raio da base $a > 0$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , o cone pode ser descrito por $\frac{h}{a}\rho \leq z \leq h$, e portanto o seu volume é dado por

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{a}\rho}^h \rho dz d\varphi d\rho = 2\pi \int_0^a \left(h\rho - \frac{h}{a}\rho^2 \right) d\rho = \pi ha^2 - \frac{2\pi ha^2}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3}.$$

6. Uma esfera de raio 2 é perfurada por uma broca de raio 1. Determine o volume do sólido resultante.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , a esfera pode ser descrita por $\rho^2 + z^2 \leq 4$, e a broca por $\rho \leq 1$. A intersecção das superfícies de ambos ocorre para $z^2 = 3$, e portanto o volume do sólido resultante será

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \rho d\rho d\varphi dz = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4-z^2-1}{2} dz = 4\pi\sqrt{3}.$$

7. Seja A o elipsóide

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

(a) Calcule o volume de A .

Resolução: Em termos das variáveis (u, v, w) definidas na sugestão, o conjunto A é descrito por $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, i.e., é uma esfera de raio 1. Uma vez que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc,$$

pelo teorema da mudança de variável temos

$$V_3(A) = \int_{\{u^2+v^2+w^2 \leq 1\}} abc \, dudvdw = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{4\pi abc}{3}.$$

(b) Supondo que A possui densidade constante igual a 1, calcule o momento de inércia do elipsóide em relação ao eixo dos zz .

Resolução:

$$\begin{aligned} I_z(A) &= \int_{\{u^2+v^2+w^2 \leq 1\}} (a^2 u^2 + b^2 v^2) abc \, dudvdw \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) abc r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{5} \pi abc \int_0^\pi (a^2 + b^2)(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{15} abc(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Sugestão: Utilize a mudança de variável $(x, y, z) = (au, bv, cw)$.

8. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável e com medida finita, uma *pirâmide* de base A e vértice he_{n+1} é o conjunto

$$P = \{(a^1(1-t), \dots, a^n(1-t), ht) \in \mathbb{R}^{n+1} : (a^1, \dots, a^n) \in A, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Prove que

$$V_{n+1}(P) = \frac{h}{n+1} V_n(A).$$

Aproveite este resultado para confirmar a fórmula da área do triângulo e o resultado que obteve na questão 5. (**Sugestão:** Utilize a mudança de variável $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = (a^1(1-t), \dots, a^n(1-t), ht)$).

Resolução: Em termos das variáveis (a^1, \dots, a^n, t) definidas na sugestão, a pirâmide P é dada por $A \times [0, 1]$. Uma vez que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial a^n} & \frac{\partial x^1}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial a^n} & \frac{\partial x^n}{\partial t} \\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial a^1} & \cdots & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial a^n} & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial t} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-t & \cdots & 0 & -a^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1-t & -a^n \\ 0 & \cdots & 0 & h \end{bmatrix} = (1-t)^n h,$$

pelo teorema da mudança de variável temos

$$V_{n+1}(P) = \int_A \int_0^1 h(1-t)^n dt dV_n = hV_n(A) \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{h}{n+1} V_n(A).$$

9. Prove o Teorema de Pappus: o volume de um sólido de revolução gerado por uma figura plana é igual a $2\pi dA$, onde A é a área da figura plana e d é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular o volume do toro

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

$(0 < r < R)$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , o volume do sólido de revolução é dado por

$$V = \int_0^{2\pi} \iint_{\text{figura}} \rho d\rho dz d\varphi = 2\pi dA,$$

uma vez que por definição

$$d = \frac{1}{A} \iint_{\text{figura}} \rho d\rho dz.$$

Consequentemente, o volume do toro é $2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$.

10. Seja A o sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq x \leq y\}$$

e densidade $\rho(x, y, z) = z$. Calcule:

(a) O volume de A ;

Resolução: Em coordenadas esféricas (r, θ, φ) , o volume do sólido é dado por

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{12} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

(b) A massa de A ;

Resolução: Nas mesmas coordenadas, e uma vez que a densidade é $z = r \cos \theta$,

$$M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{64}.$$

(c) O centróide de A ;

Resolução: Uma vez que $x = r \sin \theta \cos \varphi$, a coordenada x_C do centróide é dada por

$$x_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin \theta \cos \varphi r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{16} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right),$$

ou seja,

$$x_C = \frac{3(\pi - 2)(\sqrt{2} + 1)}{8\pi}.$$

Analogamente, uma vez que $y = r \sin \theta \sin \varphi$, a coordenada y_C do centróide é dada por

$$y_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin \theta \sin \varphi r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{32},$$

ou seja,

$$y_C = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{8\pi}.$$

Finalmente, uma vez que $z = r \cos \theta$, a coordenada z_C do centróide é dada por

$$z_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = M,$$

ou seja,

$$z_C = \frac{M}{V} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{16}$$

(d) O centro de massa de A ;

Resolução: Uma vez que $x = r \sin \theta \cos \varphi$, a coordenada x_{CM} do centro de massa é dada por

$$x_{CM} M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin \theta \cos \varphi r \cos \theta r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \frac{1}{60},$$

ou seja,

$$x_{CM} = \frac{16}{15\pi}.$$

Analogamente, uma vez que $y = r \operatorname{sen} \theta \sin \varphi$, a coordenada y_{CM} do centro de massa é dada por

$$y_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \operatorname{sen} \theta \sin \varphi r \cos \theta r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{60} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

ou seja,

$$y_{CM} = \frac{16}{15\pi} \left(\sqrt{2} - 1 \right).$$

Finalmente, uma vez que $z = r \cos \theta$, a coordenada z_{CM} do centro de massa é dada por

$$z_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta r \cos \theta r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{60} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right),$$

ou seja,

$$z_{CM} = \frac{16}{15} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

(e) O momento de inércia de A em relação ao eixo dos zz .

Resolução: Uma vez que o quadrado da distância ao eixo dos zz é dado por

$$x^2 + y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

o momento de inércia pedido é

$$I_z = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta r \cos \theta r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{96}.$$