

## Função Inversa e Função Implícita (Resolução Sumária)

30 de Abril de 2021

1. Seja  $F(x, y) = f(x, xy)$  (com  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ). Exprima a derivada parcial mista  $F_{12}$  à custa de derivadas parciais de  $f$ .

**Resolução:** Tem-se por exemplo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, xy) \cdot 1 + f_2(x, xy) \cdot y$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{12}(x, xy)x + f_{22}(x, xy)xy + f_2(x, xy).$$

2. Seja  $F(x, y) = f(x, y, g(x, y))$  (com  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ). Exprima as derivadas parciais de ordens 1 e 2 de  $F$  à custa de derivadas parciais de  $f$  e  $g$ .

**Resolução:** Mais uma vez,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y, g(x, y)) + f_3(x, y, g(x, y))g_1(x, y);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y, g(x, y)) + f_3(x, y, g(x, y))g_2(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f_{11} + f_{13}g_1 + f_{31}g_1 + f_{33}(g_1)^2 + f_3g_{11};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{12} + f_{13}g_2 + f_{32}g_1 + f_{33}g_2g_1 + f_3g_{12};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f_{22} + f_{23}g_2 + f_{32}g_2 + f_{33}(g_2)^2 + f_3g_{22}.$$

3. Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções diferenciáveis.

- (a) Mostre que a derivada de  $f \circ g$  é a derivada direccional de  $f$  segundo  $\frac{dg}{dt}$ .

**Resolução:** Pela regra da derivada da composta e pelo teorema acerca de derivadas direccionais de funções diferenciáveis, ambas as quantidades acima são iguais a

$$Df \cdot \frac{dg}{dt}.$$

- (b) Mostre que dado  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ , o máximo do conjunto

$$\{D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) : \|\mathbf{v}\| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

é atingido exactamente quando

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}.$$

(Por outras palavras, o gradiente indica a direcção de crescimento máximo da função).

**Resolução:** Trata-se de uma consequência imediata do facto de que

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

e da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

4. Sejam  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidas por

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 5(x-2)^2 + 5(y-1)^2 + 2(x-2)(y-1) + z^2 \\ \mathbf{g}(t) &= (\cos(t), \cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

(a) Em que pontos a curva parametrizada por  $\mathbf{g}$  é vertical?

**Resolução:** O vector tangente à curva é

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = (-\sin t, -\sin t, \cos t).$$

Este vector é vertical para  $\sin t = 0$ , i.e., para  $t = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Portanto a curva é vertical nos pontos  $(1, 1, 0)$  e  $(-1, -1, 0)$  (note-se que a curva é fechada).

(b) Em que pontos a superfície definida pela equação  $f = 1$  é horizontal?

**Resolução:** O vector

$$\nabla f = (10(x-2) + 2(y-1), 10(y-1) + 2(x-2), 2z)$$

é ortogonal à superfície; portanto a superfície será horizontal nos pontos em que  $\nabla f$  for vertical, i.e., nos pontos da superfície em que

$$\begin{cases} 10(x-2) + 2(y-1) = 0 \\ 10(y-1) + 2(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Como nestes pontos se tem

$$f(2, 1, z) = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1,$$

concluimos que a superfície é horizontal nos pontos  $(2, 1, \pm 1)$ .

5. Dê um exemplo de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijectiva e de classe  $C^1$  cuja inversa não seja de classe  $C^1$ .

**Resolução:** Por exemplo  $f(x) = x^3$  é bijectiva e  $C^\infty$ ; contudo,  $f'(0) = 0$  e consequentemente  $f^{-1}$  não pode ser diferenciável na origem.

6. Seja  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

- (a) Mostre que  $\mathbf{f}$  é *localmente invertível*, i.e., que dado um ponto qualquer  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  existe uma vizinhança  $V \ni \mathbf{x}_0$  na qual  $\mathbf{f}$  é invertível.

**Resolução:** Pelo Teorema da Função Inversa, basta verificar que o Jacobiano de  $\mathbf{f}$  nunca se anula:

$$J\mathbf{f}(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

- (b) Será  $\mathbf{f}$  globalmente invertível? Justifique.

**Resolução:** Não, porque não é injectiva:  $\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}(x, y + 2\pi)$ .

- (c) Calcule  $D\mathbf{f}^{-1}(1, 0)$ .

**Resolução:** Pelo Teorema da Função Inversa, e notando que  $(1, 0) = \mathbf{f}(0, 0)$ ,

$$D\mathbf{f}^{-1}(1, 0) = [D\mathbf{f}(0, 0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Seja  $\mathbf{f} : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\mathbf{f}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

- (a) Mostre que  $\mathbf{f}$  é localmente invertível.

**Resolução:** Pelo Teorema da Função Inversa, basta verificar que o Jacobiano de  $\mathbf{f}$  nunca se anula no domínio de  $\mathbf{f}$ :

$$J\mathbf{f}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

- (b) Será  $\mathbf{f}$  globalmente invertível? Justifique.

**Resolução:** Sim.

- (c) Sendo  $(x, y) = \mathbf{f}(r, \theta)$ , calcule  $D\mathbf{f}^{-1}(x, y)$ .

**Resolução:** Pelo Teorema da Função Inversa,

$$D\mathbf{f}^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

onde  $(r, \theta) = \mathbf{f}^{-1}(x, y)$ .

8. Seja  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2).$$

- (a) Determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para  $\mathbf{f}$ .

**Resolução:** Uma vez que

$$J\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 16xyz,$$

vemos que o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local na vizinhança de todos os pontos fora dos planos coordenados.

- (b) Será  $\mathbf{f}$  globalmente invertível? Justifique.

**Resolução:** Não, porque  $\mathbf{f}$  não é injectiva: por exemplo,  $\mathbf{f}(-x, y, z) = \mathbf{f}(x, y, z)$ .

- (c) Calcule  $D\mathbf{f}^{-1}(2, 2, 2)$ , onde  $\mathbf{f}^{-1}$  é a inversa local de  $\mathbf{f}$  numa vizinhança do ponto  $(1, 1, 1)$ .

**Resolução:** Pelo Teorema da Função Inversa, e notando que  $\mathbf{f}(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$ , temos

$$D\mathbf{f}^{-1}(1, 1, 1) = [D\mathbf{f}(1, 1, 1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

9. Considere a função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, y) = x^3 + x^2 - y^2.$$

- (a) Quais os pontos da curva de nível  $F^{-1}(0)$  em que o Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança na qual o conjunto é da forma  $y = f(x)$ ?

**Resolução:** Tratam-se dos pontos da curva de nível para os quais

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Os pontos da curva de nível para os quais  $y = 0$  devem satisfazer

$$x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1;$$

logo, os pontos pedidos são os pontos  $(-1, 0)$  e  $(0, 0)$ .

- (b) Esboce o conjunto de nível  $F^{-1}(0)$ . O que pode dizer sobre os pontos que determinou na alínea anterior?

**Resolução:** Trata-se de uma curva em forma de " $\alpha$ ", sendo o ponto mais à esquerda o ponto  $(-1, 0)$  e o ponto duplo o ponto  $(0, 0)$ . Em nenhuma vizinhança de nenhum destes pontos é possível representar a curva como o gráfico de uma função  $y = f(x)$ , já que cada valor de  $x$  corresponderia a dois valores de  $y$ .

- (c) Seja  $f$  a função cujo gráfico descreve  $F^{-1}(0)$  numa vizinhança do ponto  $(3, 6)$ . Calcule  $f'(3)$ .

**Resolução:** Tem-se

$$F(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - [f(x)]^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 2f(x)f'(x) = 0.$$

Como  $f(3) = 6$ , tem-se

$$27 + 6 - 12f'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(3) = \frac{11}{4}.$$

10. Considere a função  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\mathbf{F}(x, y, z, w) = (y^2 + w^2 - 2xz, y^3 + w^3 + x^3 - z^3).$$

- (a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto  $(1, -1, 1, 1)$  na qual o conjunto de nível  $\mathbf{F}^{-1}(0, 0)$  é dado por  $x = f(y, w), z = g(y, w)$ .

**Resolução:** Basta ver que

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(x, z)} = \begin{bmatrix} -2z & -2x \\ 3x^2 & -3z^2 \end{bmatrix}$$

e que

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

- (b) Calcule as derivadas parciais de  $f$  e  $g$  no ponto  $(-1, 1)$ .

**Resolução:** Temos

$$\mathbf{F}(f(y, w), y, g(y, w), w) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(y, w)} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(x, z)} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, w)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2y & 2w \\ 3y^2 & 3w^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z & -2x \\ 3x^2 & -3z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No ponto  $(1, -1, 1, 1)$  esta igualdade fica

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$