Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 2

(Diferenciabilidade. Derivada da Função Composta)

1. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

   b) $g(x,y) = \log\sqrt{1+xy}$

   c) $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

2. Calcule as derivadas parciais na origem da função: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = (\dfrac{x}{y}, xy)$

   b) $g(x,y,z) = (\sqrt{yz}, e^{xyz})$

   c) $h(x,y,z) = (x^2, xz-y, z^4)$

   d) $\phi(x,y,z) = x^2 - xyz + z^4$

   e) $\gamma(t) = (t^2, e^{2t}, \dfrac{1}{t})$

4. Calcule as derivadas de cada uma das funções seguintes no ponto P e segundo o vector $\mathbf{v}$ indicados:

   a) $f(x,y) = x^y$; $P = (1,1)$; $\mathbf{v} = (1,2)$

   b) $g(x,y,z) = e^x + yz$; $P = (1,1,1)$; $\mathbf{v} = (1,-1,1)$

5. Determine um vector segundo o qual a derivada da função $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, no ponto $(1,1)$ é nula.

6. Considere as funções:

   i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   ii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   iii) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Qual destas funções é diferenciável na origem? Justifique.

7. Considere a função: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) Calcule a derivada de f no ponto $(1,0)$ segundo o vector $(1,2)$.

   b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(1,1)$.

8. Calcule a derivada $D(f \circ g)(1,1)$ em que

$$f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)\,; \quad g(x,y) = (e^{x-y}, x-y).$$

9. Considere as funções $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ e $\sigma(t) = F(\gamma(t))$. Calcule a derivada $\sigma'(t)$.

10. Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ em que

$$h(x,y) = f(e^{-x-y}, e^{xy})\,; \quad f(u,v) = u + v^2$$

11. Considere a função $f(x,y,z) = e^x yz$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0) = (0,1,2)$ e

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada $D_v(f \circ g)(0,0)$ em que $\vec{v} = (1,2)$.

12. Considere a função $\sigma(x) = f(x, x^2+1)$ em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tal que

$$Df(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada $\sigma'(0)$.

13. Sejam $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e tais que se verifica a equação $F(x, g(x)) = 0$. Supondo que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$ calcule a derivada $g'(x)$.

14. Determine a recta tangente e o plano normal à linha definida por

$$\{(\cos t, \operatorname{sen} t, t)\ ;\ -\pi < t < \pi\}$$

no ponto $(1,0,0)$.

15. Determine a recta normal e o plano tangente ao cone

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\,\}$$

no ponto $(1,0,1)$.