Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 7

(Teorema de Green. Teorema da Divergência. Teorema de Stokes)

1. Considere o campo vectorial $F(x,y) = (-\frac{1}{3}y^3, \frac{1}{3}x^3)$ e a circunferência Γ dada pela equação $x^2+y^2=10$ e orientada no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por F ao longo de Γ.

2. Considere o campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2+y^2} \right).$$

   a) Será F conservativo no seu domínio ?
   b) Calcule o trabalho realizado por F ao longo da circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 100$, percorrida no sentido anti-horário.

3. Use o Teorema de Green para calcular a área de uma elipse definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, em que $a, b > 0$.

4. Considere a superfície

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$. Seja $H(x,y,z) = (y^2+x, x^2+y, 2z)$. Calcule o fluxo $\int_A H \cdot n$.

5. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ -1 < z < 1\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$ nos pontos de S com coordenada $z > 0$. Seja $F(x,y,z) = (\cos(yz) + 2x, x^3 + y, z + 1)$. Calcule o fluxo de F através de S no sentido de n, $\int_S F \cdot n$.

6. Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ através do cone definido por

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ 0 < z < 1,$$

orientado com a normal n com terceira componente positiva.

7. Calcule o volume da bola esférica de raio r usando o teorema da divergência.

8. Sendo $F(x,y,z) = (-y^2 e^{x+z}, -z, y)$, calcule o fluxo de $\nabla \times F$ através da superfície

$$S = \{(x,y,z)\colon x^2 + 2 = y^2 + z^2,\ x > 0,\ x^2+y^2+z^2 < 4\}$$

no sentido da normal com primeira componente negativa.

9. Considere a superfície

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2,\ x^2+y^2 < 1\},$$

orientada com a normal n tal que $n_z < 0$. Seja $F(x,y,z) = (-y, x, 1)$. Calcule o fluxo $\int_A F \cdot n$:

   a) Pela definição.
   b) Pelo teorema da divergência.

c) Pelo teorema de Stokes.

10. Considere a superfície

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2 + z^2},\ 0 < y < 1\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $F(x, y, z) = (x, -y, 0)$. Calcule o fluxo $\int_E F \cdot n$:

a) Pela definição.

b) Pelo teorema da divergência.

c) Pelo teorema de Stokes.

11. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3 - 3x^2 - 3z^2,\ y > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $F(x, y, z) = (0, y^2, -2yz)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$:

a) Pela definição.

b) Pelo teorema da divergência.

c) Pelo teorema de Stokes.

12. Usando o teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo $H(x, y, z) = (-y, x, 3)$, ao longo da elipse definida pelas equações $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{30} = 1$; $z = 0$ e orientada no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

13. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y + \operatorname{sen} x, \cos y, z^3)$$

ao longo do caminho

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t)\,; \quad t \in [0, 2\pi].$$

14. Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1,\ z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (0, 0, 2)$ através de M no sentido de n.

15. Considere o campo vectorial

$$H(x, y, z) = \left(\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2} + yz, \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} + xz, xy \right).$$

a) Calcule o trabalho de H ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto $(1, 0, 1)$.

b) Calcule o trabalho de H ao longo da circunferência definida por $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, $z = 0$.

c) Será H um gradiente no seu domínio?