Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 1

(Esboço de Conjuntos. Topologia. Limites. Continuidade)

1. Esboce os conjuntos seguintes:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$
   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$
   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$
   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x+y) = 1\}$
   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2\,;\, x > 1\,;\, y > 0\,;\, z > 0\}$
   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
   g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2+y^2}\,;\, x + y + 2z \leq 2\}$
   h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\,;\, y = 1\}$
   i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x|\}$

2. Esboce os cortes perpendiculares aos eixos coordenados dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2\,;\, x > 1\,;\, y > 0\,;\, z > 0\}$
   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
   (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2+y^2}\,;\, x + y + 2z \leq 2\}$

3. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, o exterior e a fronteira e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado ou compacto.

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$
   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$
   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,;\, y = x\}$

4. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)^2 y^2}{(x-2)^2 + y^2}$
   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2)$
   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
   f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \ln(xy)$. (**Sugestão**: Considere a linha dada por $y = e^{-1/x^2}$).

5. Estude as funções seguintes quanto à continuidade:

   a) $f(x,y) = e^{x^2+3y}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), & \text{se } y \neq 0 \\ 0\,, & \text{se } y = 0 \end{cases}$