Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral 2
Respostas à Ficha de Trabalho 4

1. Há várias maneiras de parametrizar cada variedade. Abaixo encontram-se respostas possíveis. Nalguns casos a parametrização não descreve completamente a variedade (falha alguns pontos). Se se quisesse parametrizar a variedade em torno dos pontos que faltam poder-se-ia usar a mesma expressão com um domínio de variação diferente para os parâmetros.

   (a) Dimensão 1. $g(\theta) = (\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta)$ com $0 < \theta < 2\pi$.

   (b) Dimensão 1. $g(x) = (x, \tan x)$ com $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

   (c) Dimensão 2. $g(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$ com $-2 < z < 2$ e $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$.

   (d) Dimensão 2. $g(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ com $x^2 + y^2 < 1$.

   (e) Dimensão 2. $g(\theta, \phi) = (\cos\theta(4 + \cos\phi), \operatorname{sen}\theta(4 + \cos\phi), \operatorname{sen}\phi)$ com $0 < \theta < 2\pi$ e $0 < \phi < \pi$.

   (f) Dimensão 2. $g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ com $x^2 + y^2 < \frac{3}{4}$.

   (g) Dimensão 2. $g(\theta, z) = (\sqrt{z^2+1}\cos\theta, \sqrt{z^2+1}\operatorname{sen}\theta, z)$ com $-1 < z < 1$ e $0 < \theta < 2\pi$.

   (h) Dimensão 1. $g(x) = \left(x, 1 - \frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$ com $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Dimensão 1.

   (b) $(1, 1, 2)$ por exemplo.

   (c) $g(x) = (x, x, 2x^2)$ com $x > 0$.

3. Recta tangente: $\{(1, t, \frac{t}{2}) \colon t \in \mathbb{R}\}$. Plano normal: $y + \frac{z}{2} = 0$.

4. Recta normal: $\{(3 + \frac{3}{5}t, 4 + \frac{4}{5}t, -2 + t) \colon t \in \mathbb{R}\}$. Plano tangente: $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + z = 3$.

5. Espaço normal: $\{(x, 0, z) \colon x, z \in \mathbb{R}\}$. Espaço tangente: $\{(0, y, 0) \colon y \in \mathbb{R}\}$.

6. Espaço tangente: $\{(x, y, 2x) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$. Espaço normal: $\{(x, 0, -\frac{x}{2}) \colon x \in \mathbb{R}\}$.

7. (a) Máximo: $1 + \sqrt{2}$. Mínimo: $1 - \sqrt{2}$.

   (b) Máximo: $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Mínimo: $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

8. O único ponto de máximo é $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

9. Máximo $\sqrt{3}$. Mínimo $-\sqrt{3}$.
10. As dimensões que maximizam o volume são $\frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$ sendo $\frac{4}{\sqrt{3}}$ a dimensão dos lados que formam a base da caixa.
11. Mínimo local 3 em $(1, 1, 1)$.
12. $(-1, 0, 1)$ e $(-1, 0, -1)$.