Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral 2
Respostas à Ficha de Trabalho 3

1. (a) $\nabla f(x,y) = \left(\arctan(\frac{x}{y}) + \frac{xy}{x^2+y^2}, -\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$;

   A matriz Hessiana é $\begin{bmatrix} \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$.

   (b) $\nabla f(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$;

   A matriz Hessiana é $\begin{bmatrix} -\frac{y^2}{r^3}\operatorname{sen} r - \frac{x^2}{r^2}\cos r & xy\left(\frac{1}{r^3}\operatorname{sen} r^2 - \frac{1}{r^2}\cos r\right) \\ xy\left(\frac{1}{r^3}\operatorname{sen} r - \frac{1}{r^2}\cos r\right) & -\frac{x^2}{r^3}\operatorname{sen} r - \frac{y^2}{r^2}\cos r \end{bmatrix}$

   onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

   (c) $\nabla f(x,y,z) = \left(ze^{xz}\tan(yz), \frac{ze^{xz}}{\cos^2(yz)}, xe^{xz}\tan(yz) + \frac{ye^{xz}}{\cos^2(yz)}\right)$, $H(f)(x,y,z) =$

$$\begin{bmatrix} z^2e^{xz}\tan(yz) & \frac{z^2e^{xz}}{\cos^2(yz)} & \frac{e^{xz}((1+xz)\operatorname{sen}(yz)\cos(yz)+zy)}{\cos^2(yz)} \\ \frac{z^2e^{xz}}{\cos^2(yz)} & \frac{2z^2e^{xz}\operatorname{sen}(yz)}{\cos^3(yz)} & \frac{e^{xz}(1+xz-2yz\tan(yz))}{\cos^2(yz)} \\ \frac{e^{xz}((1+xz)\operatorname{sen}(yz)\cos(yz)+zy)}{\cos^2(yz)} & \frac{e^{xz}(1+xz-2yz\tan(yz))}{\cos^2(yz)} & \frac{e^{xz}(x^2\operatorname{sen}(yz)\cos(yz)+2xy-2y^2\tan(yz))}{\cos^2(yz)} \end{bmatrix}$$

4. (a) Ponto de mínimo em $(0,0)$.
   (b) Ponto de mínimo em $(0,0)$, ponto de sela em $(0, \frac{2}{3})$.
   (c) Ponto de sela em $(0,0)$.
   (d) Ponto de mínimo em $(1,1)$.
   (e) Ponto de mínimo em $(0,0,0)$.
   (f) Ponto de sela em $(0,0)$.
   (g) Ponto de sela em $(0,0)$.
   (h) Ponto de sela em $(0,0)$; pontos de mínimo em $(-\frac{1}{2}, 1)$ e $(\frac{1}{2}, -1)$.

5. (a) O jacobiano é não nulo em $\mathbb{R}^2$, f é injectiva no seu domínio, $f(S) = \mathbb{R}^2$ e $f^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v, \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v\right)$.
   (b) O jacobiano é não nulo em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy > 0, x \neq y\}$. f não é injectiva no seu domínio. $f(S) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < v < \frac{1}{2}e^{-u}\}$, e $f^{-1} \colon f(S) \to S$ é dada pela expressão

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{v} + 2e^u} + \sqrt{\frac{1}{v} - 2e^u}}{2}, \frac{\sqrt{\frac{1}{v} + 2e^u} - \sqrt{\frac{1}{v} - 2e^u}}{2}\right)$$

6. (b) Em torno dos pontos $(x, y) \neq (0,0)$.

   (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

7. $\frac{1}{2}$.

8. $f'(1) = -\frac{\pi}{2}$.

9. (b) $f'(3) = 0$ e $f''(3) = \frac{2}{9}$.

10. $-\frac{2}{3}$.

11. (b) $\alpha'(1) = \left(1, e - \frac{1}{e}\right)$.