

Teorema de Fubini. Cálculo de volumes

1 Teorema de Fubini

O teorema de Fubini (cf. [1, 2, 3]) permite relacionar o integral em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, com o integral em $\mathbb{R}$. Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$ e uma função integrável, o integral $\int_I f$ pode ser calculado por integrações sucessivas numa variável estando as restantes fixas.

Teorema 1 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^p$, com $m + p = n$, intervalos tais que $I = A \times B$ e designemos cada ponto de I por $(x, y) \in A \times B$. Seja $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $A \times B$. Então:*

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left[\int_B f(x, y) dy \right] dx = \int_B \left[\int_A f(x, y) dx \right] dy.$$

///

Os integrais da forma $\int_A \left[\int_B f(x, y) dy \right] dx$ ou $\int_B \left[\int_A f(x, y) dx \right] dy$ são designados por *integrais iterados*. No primeiro integral, fixa-se $x \in A$ e procede-se ao cálculo do integral de f como função de y em B , obtendo-se, assim, uma função de x a qual, de seguida, é integrada em A . No segundo integral procede-se do mesmo modo trocando os papéis das variáveis x e y . Portanto, o integral de f em I obtém-se por sucessivas integrações numa variável mantendo as restantes fixas.

2 Exemplos

Nestes exemplos iremos aplicar o teorema de Fubini ao cálculo de volumes de subconjuntos abertos e limitados de $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira pode ser descrita por gráficos de funções contínuas.

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto tal que $S \subset I$ e consideremos a função característica de S definida por

$$\chi_S(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y, z) \in S \\ 0, & \text{se } (x, y, z) \in I \setminus S \end{cases}$$

A função χ_S é integrável em I e o respectivo integral representa o volume de dimensão n de S

$$\text{vol}_n(S) = \int_I \chi_S = \int_S 1$$

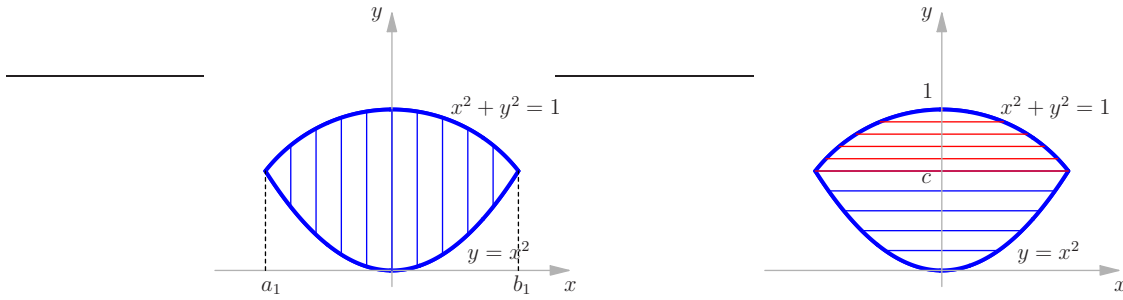


Figura 1: Cortes no conjunto definido por $x^2 + y^2 < 1$; $y > x^2$

2.1 Um subconjunto de $\mathbb{R}^2$

Consideremos o conjunto definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 ; y > x^2\}$$

representado na figura 1.

Note-se que a circunferência e a parábola intersectam-se nos pontos cujas coordenadas são determinadas resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 1 = 0 \\ y = x^2, \end{cases}$$

ou seja, são os pontos (a_1, c) , (b_1, c) em que

$$\begin{cases} a_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ b_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{cases}$$

tal como se ilustra na figura 1.

- Para o integral da forma $\int (\int dy) dx$, fixamos $a_1 < x = a < a_2$ e o respectivo corte será dado por

$$S \cap \{x = a\} = \{(a, y) : a_1 < a < b_1 ; a^2 < y < \sqrt{1 - a^2}\}.$$

Portanto,

$$\text{vol}_2(S) = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx.$$

- Para o integral da forma $\int (\int dx) dy$, fixamos $0 < y = b < 1$ e devemos notar que teremos

$$\begin{cases} -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2} \\ -\sqrt{y} < x < \sqrt{y}. \end{cases}$$

Assim, teremos dois casos a considerar:

- a) Se $0 < y = b < c$, então $-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}$.
- b) Se $c < y = b < 1$, então $-\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}$.

tal como se ilustra na figura 1.

Portanto,

$$\text{vol}_2(S) = \int_0^c \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \right) dy + \int_c^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy.$$

2.2 Uma Pirâmide triangular

Consideremos o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1; x > 0; y > 0; z > 0\}$$

representado na figura 2(a).

- Para o integral iterado da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$, fixamos $0 < z = c < 1$ e obtemos a intersecção de S com o plano $z = c$

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : x + y < 1 - c; x > 0; y > 0\} \\ &= \{(x, y, c) : 0 < y < 1 - c; 0 < x < 1 - c - y\} \end{aligned}$$

que se encontra representada na figura 2(b).

Portanto,

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z-y} dx \right) dy \right) dz$$

- Para o integral iterado da forma $\int (\int (\int dz) dy) dx$, fixamos $0 < x = a < 1$ e obtemos a intersecção de S com o plano $x = a$

$$\begin{aligned} S \cap \{x = a\} &= \{(a, y, z) : y + z < 1 - a; y > 0; z > 0\} \\ &= \{(a, y, z) : 0 < z < 1 - a - y; 0 < y < 1 - a\} \end{aligned}$$

que se encontra representada na figura 3 e de onde resulta

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx$$

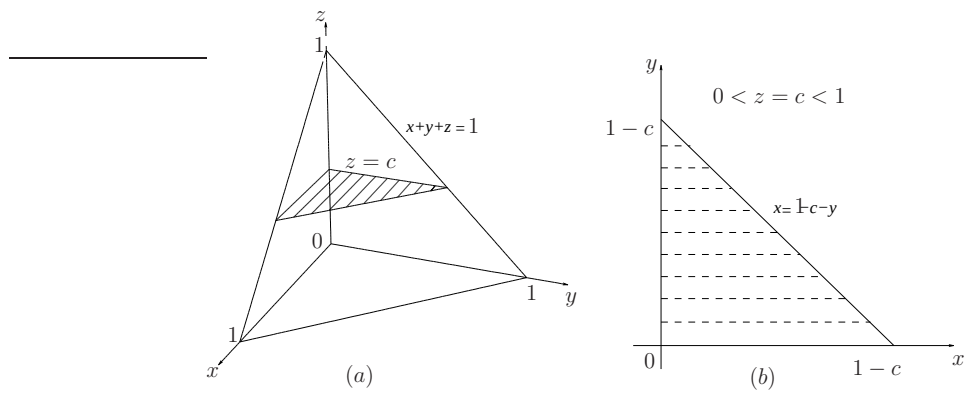


Figura 2: Intersecção com o plano horizontal $z = c$

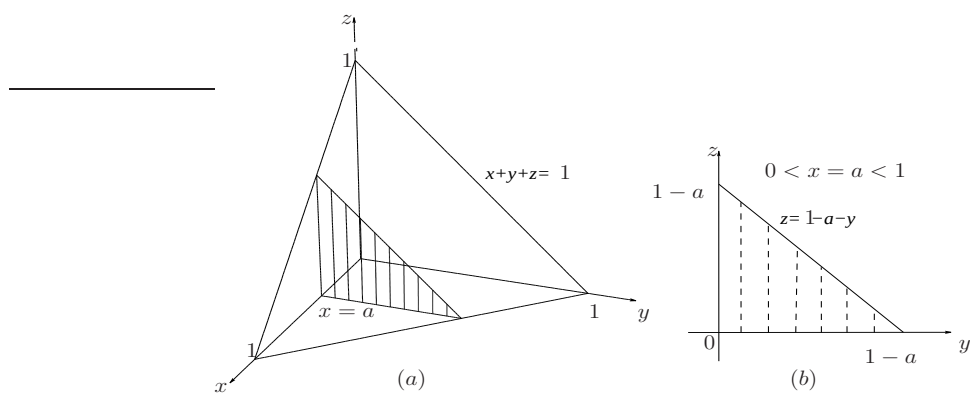


Figura 3: Intersecção com o plano vertical $x = a$

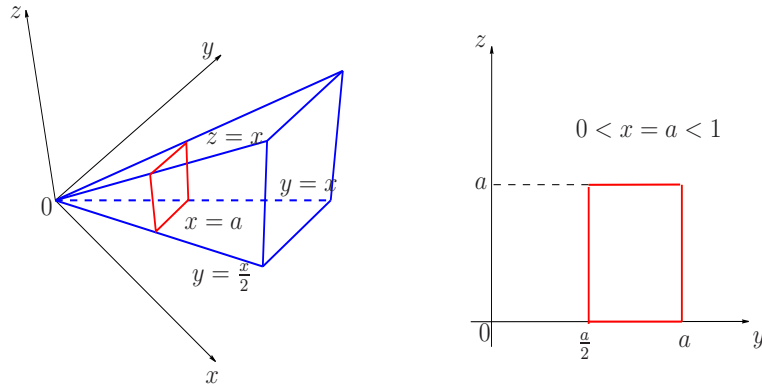


Figura 4: Intersecção com o plano $x = a$

2.3 Uma Pirâmide quadrangular

Consideremos o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1; \frac{x}{2} < y < x; 0 < z < x\}$$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$, fixamos $0 < x = a < 1$. Na figura 4 representa-se o conjunto S e a intersecção de S com o plano $x = a$ que se pode descrever da forma seguinte

$$S \cap \{x = a\} = \{(a, y, z) : \frac{a}{2} < y < a; 0 < z < a\}$$

donde se conclui que

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left(\int_{\frac{x}{2}}^x \left(\int_0^x dz \right) dy \right) dx$$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$, devemos fixar $0 < y = b < 1$. Dado que $\frac{x}{2} < y < x$, teremos $b < x < 2b$ e como $0 < x < 1$ devem ocorrer dois casos. Ou $2b < 1$, ou seja, $0 < b < \frac{1}{2}$ ou $2b < 1$, ou seja, $\frac{1}{2} < b < 1$, tal como se representa na figura 5.

Para $0 < y = b < \frac{1}{2}$, a intersecção de S co o plano $y = b$ é dada por

$$S \cap \{y = b\} = \{(x, b, z) : y < x < 2y : 0 < z < x\}$$

e para $\frac{1}{2} < y = b < 1$ temos,

$$S \cap \{y = b\} = \{(x, b, z) : y < x < 1 : 0 < z < x\}$$

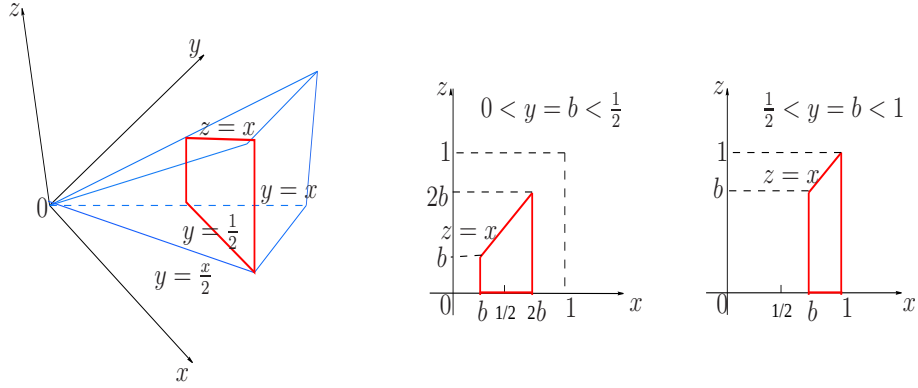


Figura 5: Intersecção com o plano $y = b$

o que nos permite escrever o volume de S como a soma de dois integrais iterados

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_y^{2y} \left(\int_0^x dz \right) dx \right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_y^1 \left(\int_0^x dz \right) dx \right) dy$$

- Para o integral da forma $\int(\int(\int dx)dz)dy$, teremos as inequações

$$\begin{cases} 0 < z < x < 1 \\ y < x < 2y. \end{cases}$$

Portanto, para $0 < y = b < \frac{1}{2}$ teremos

$$\begin{cases} 0 < z < x \\ y < x < 2y, \end{cases}$$

e deveremos fixar z em dois intervalos: ou $0 < z < y$, ou $y < z < 2y$.

Para $\frac{1}{2} < y = b < 1$ teremos

$$\begin{cases} 0 < z < x < 1 \\ y < x, \end{cases}$$

e deveremos fixar z em dois intervalos: ou $0 < z < y$, ou $y < z < 1$.

Assim, o volume de S será dado pela soma de quatro integrais iterados

$$\begin{aligned} \text{vol}(S) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^y \left(\int_y^{2y} dx \right) dz \right) dy + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_y^{2y} \left(\int_z^{2y} dx \right) dz \right) dy + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^y \left(\int_y^1 dx \right) dz \right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_y^1 \left(\int_z^1 dx \right) dz \right) dy \end{aligned}$$

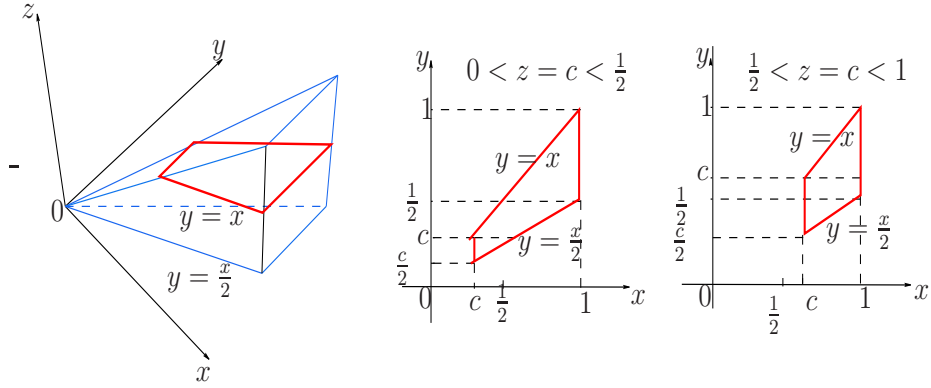


Figura 6: Intersecção com o plano $z = c$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$, fixamos $z = c$ e, tal como se representa na figura 6, devem ocorrer dois casos, ou $0 < z = c < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < z = c < 1$. Em qualquer dos casos, a intersecção de S com o plano $z = c$ dá por

$$S \cap \{z = c\} = \{(x, y, c) : z < x < 1; \frac{x}{2} < y < x\}$$

De seguida devemos fixar $y = b$ e, de acordo com a figura 6, para cada um dos casos obtemos três regiões de integração na variável x .

Note-se que das inequações de definição de S obtemos

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < x < 2y \\ z < x < 2y \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} 0 < z < x < 1 \\ \frac{z}{2} < y < x < 2y. \end{cases}$$

Isto quer dizer que depois de fixar z e y teremos $x < 1$ se $2y > 1$, ou seja, se $y > \frac{1}{2}$, ou teremos $x < 2y$ se $y < \frac{1}{2}$. Por outro lado, teremos $x > z$ se $y < z$ ou $x > y$ se $y > z$.

Podemos concluir que, depois de fixar z , para fixar y teremos de considerar os valores $\frac{z}{2}$, z , $\frac{1}{2}$ e, portanto, teremos duas situações distintas (ver figura 6).

- Para $0 < z = c < \frac{1}{2}$, a coordenada y será fixada em três intervalos: ou $]\frac{c}{2}, c[$, ou $]c, \frac{1}{2}[$ ou $]\frac{1}{2}, 1[$.
- Para $\frac{1}{2} < z = c < 1$, a coordenada y será fixada em três intervalos: ou $]\frac{c}{2}, \frac{1}{2}[$, ou $]\frac{1}{2}, c[$ ou $]c, 1[$.

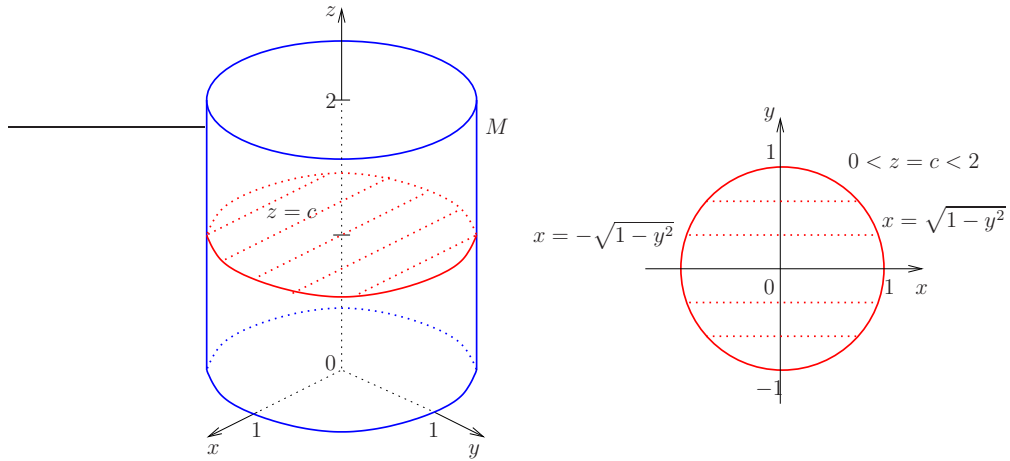


Figura 7: Corte no cilindro segundo o plano horizontal $z = c$

Assim, o volume de S será dado pela soma de seis integrais iterados

$$\begin{aligned}
 Vol(S) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{z}{2}}^z \left(\int_z^{2y} dx \right) dy \right) dz \\
 &+ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_z^{\frac{1}{2}} \left(\int_y^{2y} dx \right) dy \right) dz \\
 &+ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_y^1 dx \right) dy \right) dz \\
 &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_z^{2y} dx \right) dy \right) dz \\
 &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^z \left(\int_z^1 dx \right) dy \right) dz \\
 &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_z^1 \left(\int_y^1 dx \right) dy \right) dz
 \end{aligned}$$

2.4 Um Cilindro

Consideremos o cilindro vertical de raio um e altura dois dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1; 0 < z < 2\}$$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$, fixamos $0 < z = c < 2$ e obtemos

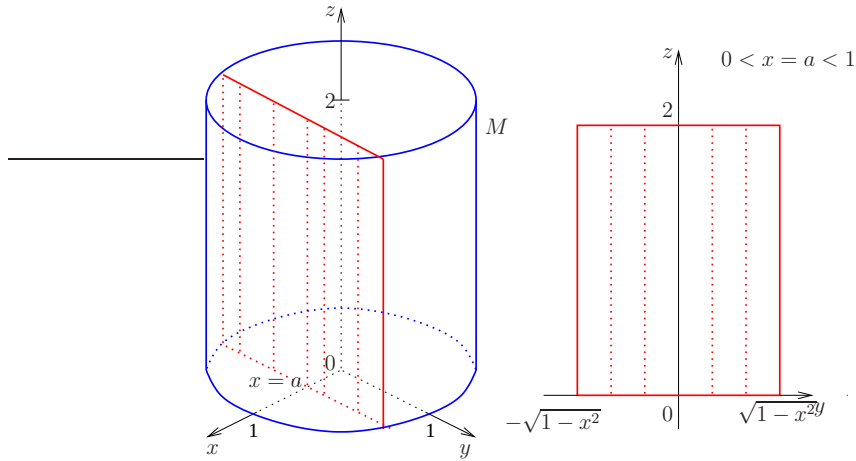


Figura 8: Corte no cilindro segundo o plano vertical $x = a$

a intersecção de S com o plano $z = c$ que se representa na figura 7

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < 1\} \\ &= \{(x, y, c) : -1 < y < 1; -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}\} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy \right) dz$$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$, fixamos $-1 < x = a < 1$ e obtemos

$$\begin{aligned} S \cap \{x = a\} &= \{(a, y, z) : y^2 < 1 - a^2; 0 < z < 2\} \\ &= \{(a, y, z) : -\sqrt{1-a^2} < y < \sqrt{1-a^2}; 0 < z < 2\} \end{aligned}$$

que se representa na figura 8, e, portanto,

$$\text{vol}_3(S) = \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dz \right) dx$$

2.5 Um Cone

Consideremos o cone

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\}$$

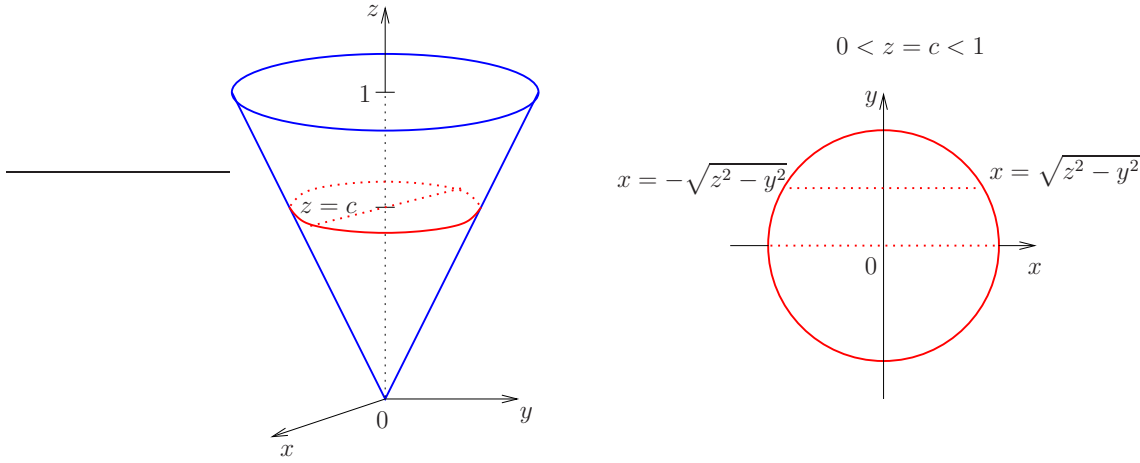


Figura 9: Intersecção com o plano $z = c$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$, fixamos $0 < z = c < 1$ e obtemos

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < c^2\} \\ &= \{(x, y, c) : -c < y < c; -\sqrt{c^2 - y^2} < x < \sqrt{c^2 - y^2}\} \end{aligned}$$

que se representa na figura 9 donde se conclui que

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left(\int_{-c}^c \left(\int_{-\sqrt{c^2 - y^2}}^{\sqrt{c^2 - y^2}} dx \right) dy \right) dz$$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$, fixamos $-1 < y = b < 1$ e obtemos

$$\begin{aligned} S \cap \{y = b\} &= \{(x, b, z) : x^2 + b^2 < z^2 < 1\} \\ &= \{(x, b, z) : -\sqrt{1 - b^2} < x < \sqrt{1 - b^2}; \sqrt{x^2 + b^2} < z < 1\} \end{aligned}$$

tal como se apresenta na figura 10 e, portanto,

$$\text{vol}_3(S) = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1 - y^2}}^{\sqrt{1 - y^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 dz \right) dx \right) dy$$

2.6 Um Hiperbolóide

Consideremos o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 + 1; x > 0; y > 0; 0 < z < 1\}$$

Trata-se de um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ limitado pelos planos $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $z = 1$ e pela superfície $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

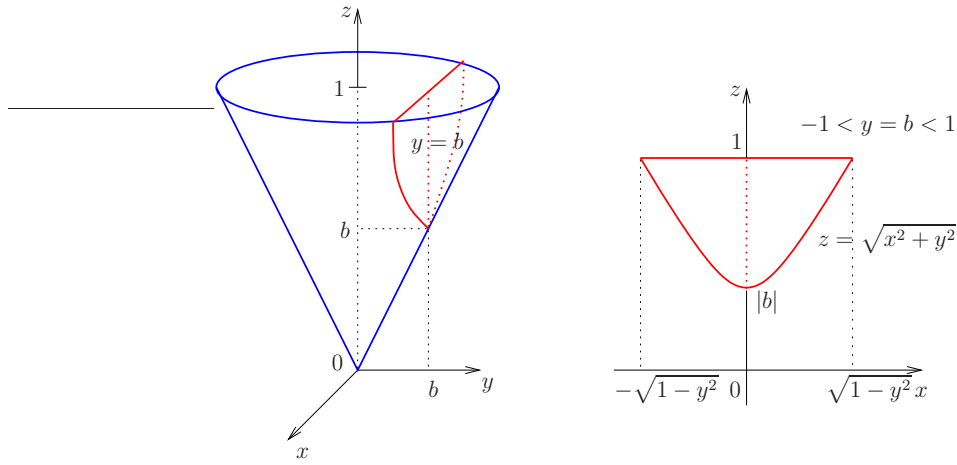


Figura 10: Intersecção com o plano $y = b$

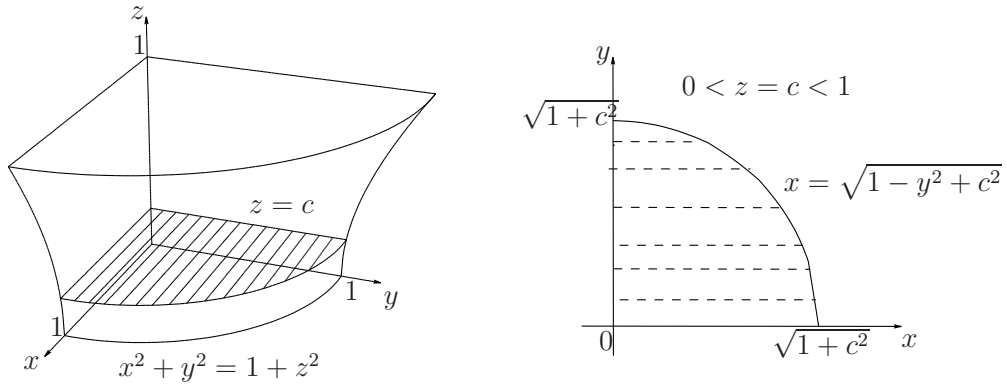


Figura 11: Intersecção com o plano $z = c$

- Usando o integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$, fixamos $0 < z = c < 1$ e, portanto

$$S \cap \{z = c\} = \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < c^2 + 1; x > 0; y > 0\}$$

ou seja, $S \cap \{z = c\}$ é um quarto de círculo centrado na origem e de raio $\sqrt{c^2 + 1}$ tal como se representa na figura 11.

De seguida fixamos $y = b$, com $0 < b < \sqrt{c^2 + 1}$, e obtemos,

$$0 < z < 1; 0 < y < \sqrt{1 + z^2}; 0 < x < \sqrt{1 + z^2 - y^2}$$

Assim,

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1+z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1+z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz$$

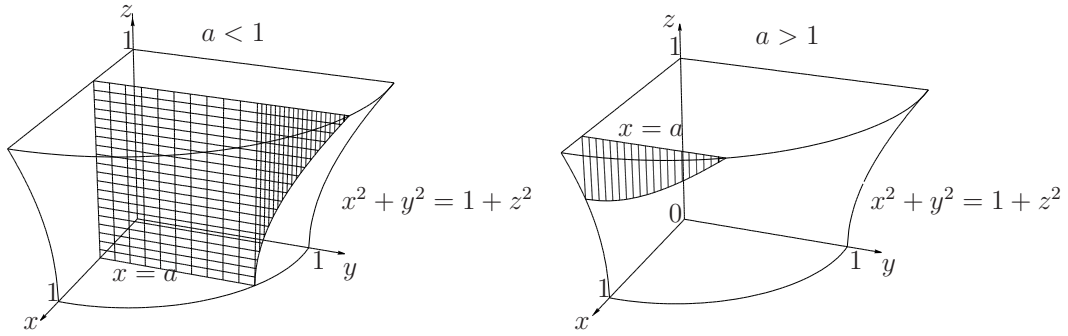


Figura 12: Intersecção com o plano $x = a$

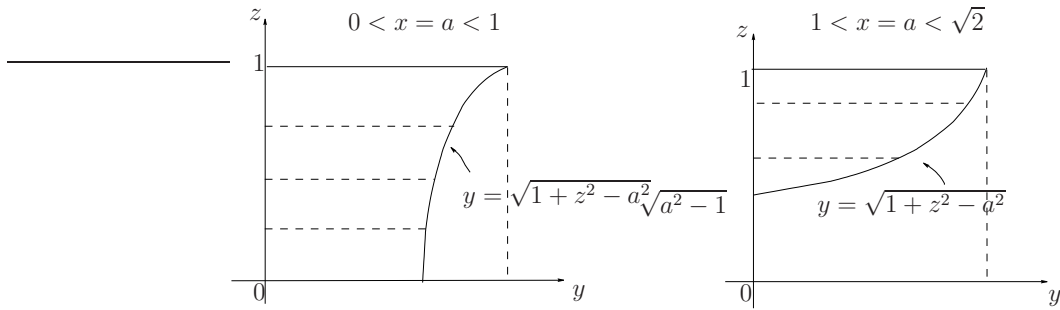


Figura 13: Intersecção com o plano $x = a$

- Consideremos o integral iterado da forma $\int(\int(\int dy)dz)dx$. Neste caso fixamos $0 < x < \sqrt{2}$ e obtemos

$$S \cap \{x = a\} = \{(a, y, z) : y^2 < z^2 - a^2 + 1; y > 0; 0 < z < 1\}$$

Portanto, devemos ter $z^2 - a^2 + 1 > 0$, ou seja $z^2 > x^2 - 1$.

Assim, se $x = a < 1$ então $z > 0$ e $0 < y < \sqrt{z^2 - x^2 + 1}$.

Se $x = a > 1$ então $z > \sqrt{x^2 - 1}$ e $0 < y < \sqrt{z^2 - x^2 + 1}$.

Nas figuras 12 e 13 apresentam-se as intersecções de S com o plano $x = a$ para os dois casos acima descritos: $0 < a < 1$ e $1 < a < \sqrt{2}$.

Destas figuras obtemos

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1+z^2-x^2}} dy \right) dz \right) dx + \\ &+ \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{\sqrt{x^2-1}}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1+z^2-x^2}} dy \right) dz \right) dx \end{aligned}$$

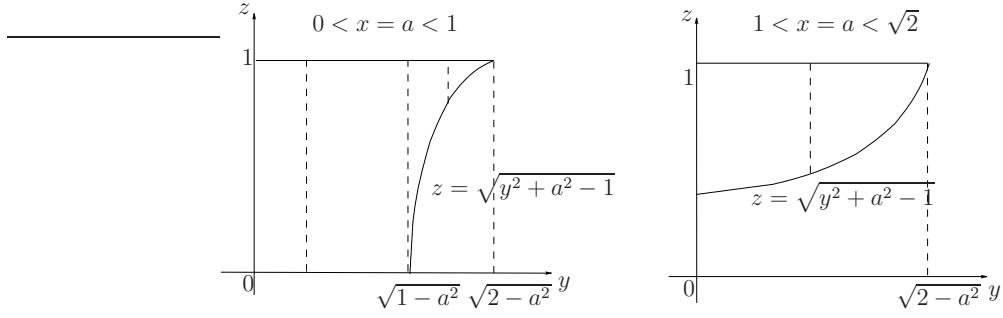


Figura 14: Intersecção com o plano $x = a$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$, fixamos $0 < x = a < \sqrt{2}$ e obtemos

$$S \cap \{x = a\} = \{(a, y, z) : z^2 > a^2 + y^2 - 1; y > 0; 0 < z < 1\}$$

ou seja,

- Se $x^2 + y^2 < 1$ então $z > 0$.
- Se $1 < x^2 + y^2 < 2$ então $z > \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

tal como se apresenta na figura 14.

Assim, temos

- Se $x^2 + y^2 < 1$, então $0 < x < 1$; $y < \sqrt{1 - x^2}$ e $0 < z < 1$.
- Se $x^2 + y^2 > 1$ e $0 < x < 1$ então $\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{2 - x^2}$, e $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} < z < 1$.
- Se $x^2 + y^2 > 1$ e $1 < x < \sqrt{2}$ então $0 < y < \sqrt{2 - x^2}$ e $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} < z < 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^1 dz \right) dy \right) dx + \\ &+ \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2-1}}^1 dz \right) dy \right) dx + \\ &+ \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2-1}}^1 dz \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

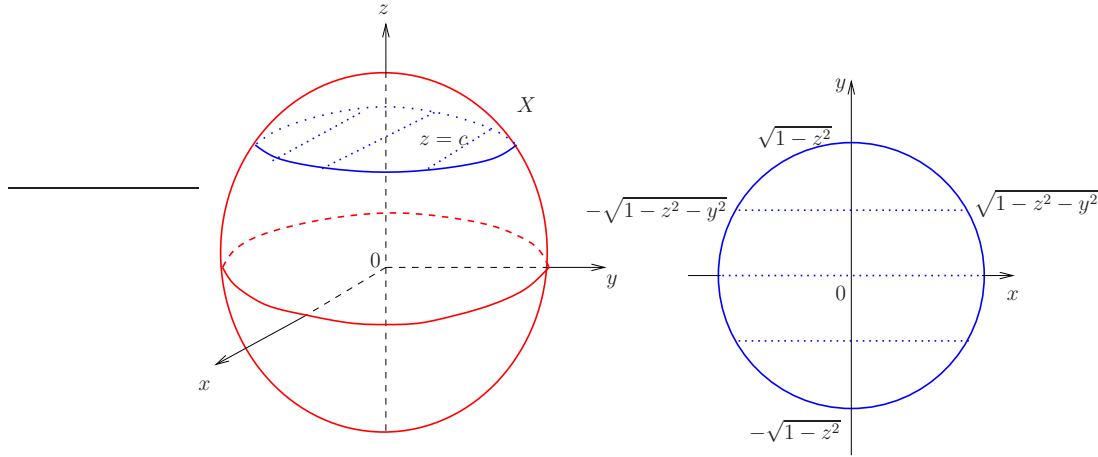


Figura 15: Corte horizontal $z = c$ numa bola

2.7 Uma Bola

Seja S a bola de raio um e centro na origem em $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

Devido à simetria esférica de S basta considerar o integral iterado da forma

$$\int \left(\int \left(\int_S dx \right) dy \right) dz.$$

Fixando $-1 < z = c < 1$ obtemos, em x, y , um círculo centrado na origem e com raio igual a $\sqrt{1-c^2}$ tal como se representa na figura 15.

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < 1 - c^2\} \\ &= \{(x, y, c) : |y| < \sqrt{1 - c^2}; |x| < \sqrt{1 - c^2 - y^2}\} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\text{vol}_3(S) = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz$$

2.8 Um Toro

Neste exemplo vamos considerar o sólido em $\mathbb{R}^3$ limitado por um quarto do toro de raios $R = 3$ e $r = 1$ e pelos planos $x = 0$ e $y = 0$ tal como se representa na figura 16.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 < 1; x > 0; y > 0\}$$

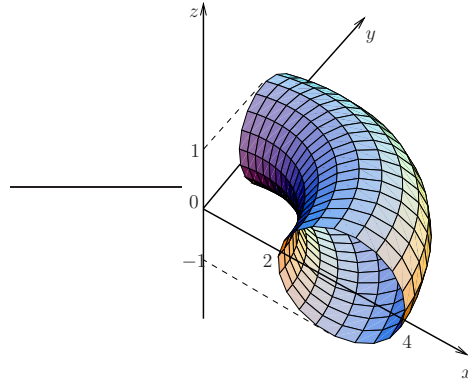


Figura 16: Parte do Toro de raios $R = 3$ e $r = 1$

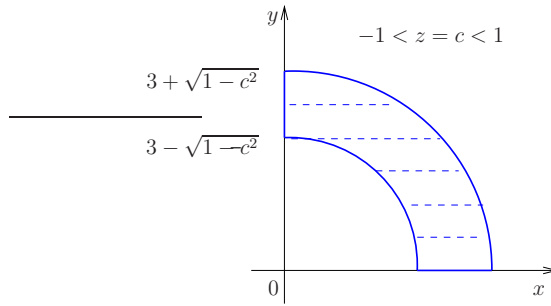


Figura 17: Corte no Toro com um plano $z = c$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$, fixamos $-1 < z = c < 1$ e obtemos

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : -\sqrt{1 - c^2} < \sqrt{x^2 + y^2} - 3 < \sqrt{1 - c^2}; x > 0; y > 0\} \\ &= \{(x, y, c) : 3 - \sqrt{1 - c^2} < \sqrt{x^2 + y^2} < 3 + \sqrt{1 - c^2}; x > 0; y > 0\} \end{aligned}$$

tal como se representa na figura 17. De seguida devemos fixar a variável y . Da figura 17 fica claro que, devemos fixar $0 < y = b < 3 - \sqrt{1 - c^2}$ ou $3 - \sqrt{1 - c^2} < y < 3 + \sqrt{1 - c^2}$.

Portanto, o volume de S será expresso pela soma de dois integrais

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{3 - \sqrt{1 - z^2}} \left(\int_{\sqrt{(3 - \sqrt{1 - z^2})^2 - y^2}}^{\sqrt{(3 + \sqrt{1 - z^2})^2 - y^2}} dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_{-1}^1 \left(\int_{3 - \sqrt{1 - z^2}}^{3 + \sqrt{1 - z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{(3 + \sqrt{1 - z^2})^2 - y^2}} dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$

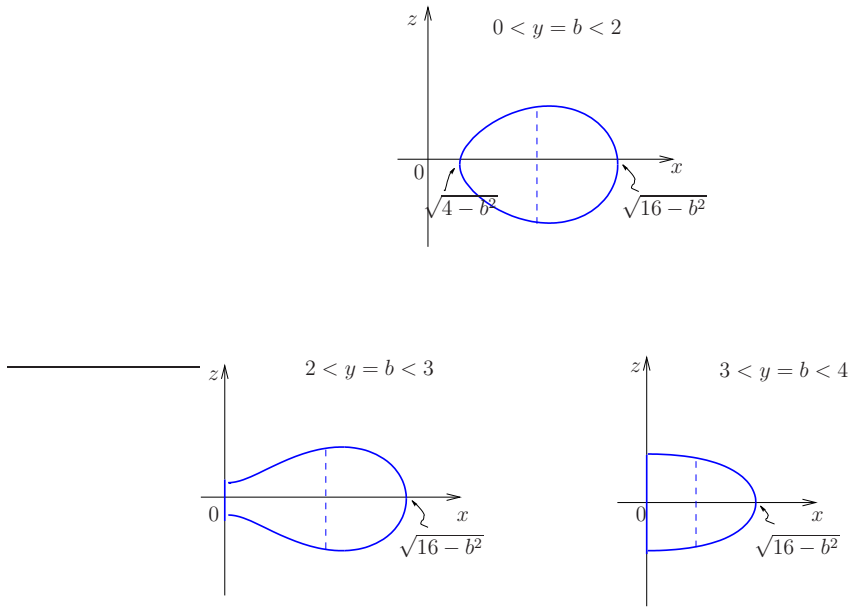


Figura 18: Corte no Toro com um plano $y = b$

- Para o integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$, fixamos em primeiro lugar $0 < y = b < 4$.

Note-se que para $x = 0$ temos

$$(y - 3)^2 + z^2 < 1$$

e, portanto $2 < y < 4$.

Assim, devemos fixar $0 < y = b < 2$ ou $2 < y = b < 4$ como se representa na figura 18. Note-se que o caso $2 < y = b < 4$ se apresenta subdividido em dois: $2 < y = b < 3$ e $3 < y = b < 4$. Esta subdivisão é relevante para o cálculo do integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)dz)dy$ que não será considerado nestas notas, mas ficará ao cuidado do leitor.

Para $0 < y = b < 2$, obtemos

$$\sqrt{4 - b^2} < x < \sqrt{16 - b^2}$$

e

$$-\sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + b^2} - 3)^2} < z < \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + b^2} - 3)^2}$$

Para $2 < y = b < 4$, obtemos

$$0 < x < \sqrt{16 - b^2}$$

e, tal como anteriormente,

$$-\sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + b^2} - 3)^2} < z < \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + b^2} - 3)^2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}}^{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}} dz \right) dx \right) dy + \\ &+ \int_2^4 \left(\int_0^{\sqrt{16-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}}^{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}} dz \right) dx \right) dy \end{aligned}$$

Referências

- [1] Luís T. Magalhães. *Integrais Múltiplos*. Texto Editora, 1996.
- [2] H. A. Priestley. *Introduction to Integration*. Oxford, Clarendon Press, 1997.
- [3] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 1996.