

Análise Matemática III

1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 8 (a entregar na aula prática da semana de 11/11/2002)

1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x \cos yz &= 1 \\ x \sin yz &= 0 \\ x + y &= 2 \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ onde este sistema tem uma solução única.

2. Considere a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, 2x \neq y\}$, definida por:

$$f(x, y) = \left(\log xy, \frac{1}{2x - y} \right)$$

- a) Determine os pontos $(x, y) \in A$ em que f é localmente invertível.
b) Sabendo que $f(1, 1) = (0, 1)$, determine a derivada da função f^{-1} no ponto $(0, 1)$.

Resolução

1. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = (x \cos yz, x \sin yz, x + y)$$

Trata-se de uma função de classe C^1 que verifica $F(1, 1, 0) = (1, 0, 2)$, logo o ponto $(1, 1, 0)$ é uma solução do sistema de equações. O Teorema da Função Inversa garante que na vizinhança da solução $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ temos uma solução única desde que $\det DF(1, 1, 0) \neq 0$.

De facto, temos

$$\det DF = \det \begin{bmatrix} \cos yz & -xz \sin yz & -xy \sin yz \\ \sin yz & xz \cos yz & xy \cos yz \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -zx^2y \sin yz \cos yz + zx^2y \sin yz \cos yz - xy \cos^2 yz - xy \sin^2 yz = -xy.$$

Logo no ponto $(1, 1, 0)$ obtemos $\det DF(1, 1, 0) = -1 \neq 0$ portanto existe uma vizinhança deste ponto onde F é invertível e podemos concluir o que nos é pedido.

- 2.a) A função f é de classe C^1 no seu domínio. O Teorema da Função Inversa garante que f tem inversa local em torno do ponto $(x, y) \in A$ desde que o determinante $\det Df(x, y)$ seja não nulo nesse ponto. Temos

$$\det Df(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{y}{xy} & \frac{x}{xy} \\ \frac{-2}{(2x-y)^2} & \frac{1}{(2x-y)^2} \end{bmatrix} = \frac{y+2x}{xy(2x-y)^2}$$

O determinante anula-se nos pontos (x, y) em que $y = -2x$. Como estes pontos não pertencem ao domínio podemos concluir que f tem inversa local em todos os pontos $(x, y) \in A$.

- 2.b) Note-se que temos

$$\det Df(1, 1) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

Sendo f invertível no ponto $(1, 1)$ e sabendo que $f(1, 1) = (0, 1)$ obtemos

$$Df^{-1}(0, 1) = [Df(1, 1)]^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$