

Análise Matemática III

2º semestre de 2002/2003

Exercício Teste 8 (a entregar na semana de 12/5/2003)

Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z + 1)^2, 0 < z < 2\}$$

- (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.
- (b) Encontre uma parametrização para M .
- (c) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(0, 2, 1)$.

Resolução

- (a) Consideremos a função $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, com $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 9, 0 < z < 2\}$, definida por

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - (z + 1)^2.$$

Trata-se de uma função de classe C^1 tal que

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\},$$

ou seja, M é o conjunto de nível zero de F . A derivada

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2(z + 1) \end{bmatrix}$$

tem característica igual a um em todos os pontos de M . De facto, o ponto de coordenadas $(0, 0, -1)$ é o único em que isso não acontece, mas este ponto não pertence a M .

Portanto M é uma variedade de dimensão dois em $\mathbb{R}^3$.

- (b) Em coordenadas cilíndricas a variedade M é dada pela equação $\rho^2 = (z + 1)^2$. Assim, consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = ((z + 1) \cos \theta, (z + 1) \sin \theta, z)$$

sendo

$$T = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < 2\}.$$

Esta função é de classe C^1 , injectiva e a respectiva derivada é dada pela matriz

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} -(z + 1) \sin \theta & \cos \theta \\ (z + 1) \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que tem característica igual a dois, ou seja, as duas colunas são linearmente independentes.

Portanto g é uma parametrização para M .

- (c) Dado que $g(\frac{\pi}{2}, 1) = (0, 2, 1)$, o espaço tangente a M no ponto $(0, 2, 1)$ é gerado pelas colunas da matriz

$$Dg(\frac{\pi}{2}, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{aligned} T_{(0,2,1)}M &= \{\alpha(-2, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\alpha, \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e, portanto, é o plano dado pela equação

$$y = z.$$

O espaço normal a M no ponto $(0, 2, 1)$ é gerado pela linha da matriz

$$DF(0, 2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$(T_{(0,2,1)}M)^\perp = \{\lambda(0, 4, -4) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto, é a recta dada pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= -z \end{cases}$$