

Análise Matemática III

2º semestre de 2002/2003

Exercício Teste 6 (a entregar na semana de 28/4/2003)

1. Chama-se campo radial (em $\mathbb{R}^3$) a um campo vectorial da forma

$$F(x, y, z) = g(r) (x, y, z)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e g é uma função real de variável real.

- (a) Admitindo que g é contínua num intervalo $[a, b]$, com $0 < a < b$, prove que F é conservativo na região definida pela condição

$$a^2 < x^2 + y^2 + z^2 < b^2.$$

- (b) Considere o campo

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

Determine um potencial escalar de F em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo do segmento de recta unindo o ponto $(1, 1, 1)$ ao ponto $(2, -1, 1)$.

2. Recorra ao Teorema de Green para calcular

$$\int_C xy^2 dx + 2x^2 y dy$$

onde C é a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ e orientada positivamente.

Resolução

1. (a) Tem-se

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Por outro lado o campo F pode escrever-se na forma

$$F(x, y, z) = rg(r) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

pelo que, se $G(r)$ for uma primitiva de $rg(r)$ (i.e., $G'(r) = rg(r)$), temos

$$F = \nabla G(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

visto que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = G'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = rg(r) \frac{x}{r} = g(r)x,$$

e analogamente se tem $\frac{\partial G}{\partial y} = g(r)y$, $\frac{\partial G}{\partial z} = g(r)z$.

1. (b) Aplicando o resultado da alínea anterior tem-se

$$P\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r}$$

logo um potencial de F em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é

$$G(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Por conseguinte, sendo S o segmento de recta unindo o ponto $(1, 1, 1)$ ao ponto $(2, -1, 1)$, tem-se

$$\int_S F \cdot dg = G(2, -1, 1) - G(1, 1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Seja $P(x, y) = xy^2$ e $Q(x, y) = 2x^2y$. P e Q são campos de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e a elipse C é uma curva simples fechada pelo que, designando por R a região interior a C , temos (pelo teorema de Green)

$$\int_C xy^2 dx + 2x^2y dy = \int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_R 2xy dx dy$$

recorrendo a uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{aligned} x &= 3\rho \cos \theta, \\ y &= 2\rho \sin \theta, \quad (\rho > 0, \ 0 < \theta < 2\pi) \end{aligned}$$

com jacobiano $J = 6\rho$, para calcular o integral duplo, temos,

$$\begin{aligned} \int_C xy^2 dx + 2x^2y dy &= \int \int_R 2xy dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 72\rho^3 \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta \\ &= 72 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 18 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$