Análise Matemática III
2º semestre de 2002/2003

Exercício Teste 10 (a entregar na semana de 26/5/2003)

Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,;\, z > \frac{1}{2}\}$$

a) Calcule a área de S.

b) Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (-y, x, z)$ através de S segundo a normal com terceira componente positiva.

Resolução

(a) S é a superfície de uma calote esférica. Para parametrizar S podemos usar tanto coordenadas cilíndricas como coordenadas esféricas.

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) a superfície é definida pela equação $\rho = \sqrt{1 - z^2}$ em que $\frac{1}{2} < z < 1$. Consideremos a parametrização $g : T \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = (\sqrt{1 - z^2}\cos\theta \,,\, \sqrt{1 - z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta \,,\, z)$$

em que

$$T = \{(\theta, z) : 0 < \theta < 2\pi \,;\, \frac{1}{2} < z < 1\}$$

Note-se que $g(T) = S \setminus L$ em que L é a linha sobre S definida por

$$L = \{(x, 0, z) \in S : x \geq 0 \,;\, \frac{1}{2} < z < 1\}$$

e, portanto, $vol_2(S) = vol_2(S \setminus L) = vol_2(g(T))$.

Assim, teremos

$$vol_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \|D_1 g(\theta, z) \times D_2 g(\theta, z)\| \, dz d\theta$$

Da expressão de g obtemos

$$\begin{aligned} D_1 g(\theta, z) &= (-\sqrt{1 - z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta \,,\, \sqrt{1 - z^2}\cos\theta \,,\, 0) \\ D_2 g(\theta, z) &= (-\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\cos\theta \,,\, -\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\,\mathrm{sen}\,\theta \,,\, 1) \end{aligned}$$

ou seja

$$\|D_1 g(\theta, z) \times D_2 g(\theta, z)\| = \left\|(\sqrt{1 - z^2}\cos\theta \,,\, \sqrt{1 - z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta \,,\, z)\right\| = 1$$

Portanto, a área de S é dada por

$$vol_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 dz d\theta = \pi$$

Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) a superfície S é dada pela equação $r = 1$. Dado que $\frac{1}{2} < z < 1$ e sabendo que $z = \cos\phi$, concluimos que $0 < \phi < \pi/3$.

Assim, consideremos a parametrização $h : U \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$h(\theta, \phi) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,,\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,,\ \cos\phi)$$

em que

$$U = \{(\theta, \phi) : 0 < \theta < 2\pi\ ;\ 0 < \phi < \pi/3\}$$

Do mesmo modo que para a parametrização g, se conclui que $h(U) = S \setminus L$ e que também teremos $vol_2(S) = vol_2(h(U))$.

Da espressão de h obtemos,

$$\begin{aligned} D_1h(\theta,\phi) &= (-\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,,\ \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,,\ 0) \\ D_2h(\theta,\phi) &= (\cos\phi\cos\theta\,,\ \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,,\ -\operatorname{sen}\phi) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|D_1h(\theta,\phi) \times D_2h(\theta,\phi)\| = \big\|(-\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,,\ -\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\,,\ -\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\big\| = \operatorname{sen}\phi$$

Substituindo na expressão da área de S teremos,

$$vol_2(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta = \pi$$

(b) Da equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ obtemos a normal unitária a S

$$\nu(x, y, z) = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\|(2x, 2y, 2z)\|} = (x, y, z)$$

e, portanto

$$F \cdot \nu = (-y, x, z) \cdot (x, y, z) = z^2$$

Assim o fluxo de F através de S segundo a normal ν é dado pelo integral

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S z^2$$

que pode ser calculado usando uma das parametrizações da alínea anterior.

Usando a parametrização g obtemos

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S z^2 = \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{1} z^2 dz d\theta = \frac{7\pi}{12}$$

Usando a parametrização h o fluxo é dado por

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S z^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta = \frac{7\pi}{12}$$