

Análise Matemática III

2º semestre de 2002/2003

Exercício Teste 10 (a entregar na semana de 26/5/2003)

Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > \frac{1}{2}\}$$

- a) Calcule a área de S .
- b) Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (-y, x, z)$ através de S segundo a normal com terceira componente positiva.

Resolução

- (a) S é a superfície de uma calote esférica. Para parametrizar S podemos usar tanto coordenadas cilíndricas como coordenadas esféricas.

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) a superfície é definida pela equação $\rho = \sqrt{1 - z^2}$ em que $\frac{1}{2} < z < 1$. Consideremos a parametrização $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = (\sqrt{1 - z^2} \cos \theta, \sqrt{1 - z^2} \sin \theta, z)$$

em que

$$T = \{(\theta, z) : 0 < \theta < 2\pi; \frac{1}{2} < z < 1\}$$

Note-se que $g(T) = S \setminus L$ em que L é a linha sobre S definida por

$$L = \{(x, 0, z) \in S : x \geq 0; \frac{1}{2} < z < 1\}$$

e, portanto, $\text{vol}_2(S) = \text{vol}_2(S \setminus L) = \text{vol}_2(g(T))$.

Assim, teremos

$$\text{vol}_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \|D_1 g(\theta, z) \times D_2 g(\theta, z)\| dz d\theta$$

Da expressão de g obtemos

$$\begin{aligned} D_1 g(\theta, z) &= (-\sqrt{1 - z^2} \sin \theta, \sqrt{1 - z^2} \cos \theta, 0) \\ D_2 g(\theta, z) &= \left(-\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \cos \theta, -\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \sin \theta, 1\right) \end{aligned}$$

ou seja

$$\|D_1 g(\theta, z) \times D_2 g(\theta, z)\| = \left\|(\sqrt{1 - z^2} \cos \theta, \sqrt{1 - z^2} \sin \theta, z)\right\| = 1$$

Portanto, a área de S é dada por

$$\text{vol}_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 dz d\theta = \pi$$

Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) a superfície S é dada pela equação $r = 1$. Dado que $\frac{1}{2} < z < 1$ e sabendo que $z = \cos \phi$, concluímos que $0 < \phi < \pi/3$.

Assim, consideremos a parametrização $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$h(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

em que

$$U = \{(\theta, \phi) : 0 < \theta < 2\pi ; 0 < \phi < \pi/3\}$$

Do mesmo modo que para a parametrização g , se conclui que $h(U) = S \setminus L$ e que também teremos $\text{vol}_2(S) = \text{vol}_2(h(U))$.

Da expressão de h obtemos,

$$\begin{aligned} D_1 h(\theta, \phi) &= (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0) \\ D_2 h(\theta, \phi) &= (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|D_1 h(\theta, \phi) \times D_2 h(\theta, \phi)\| = \|(-\sin^2 \phi \cos \theta, -\sin^2 \phi \sin \theta, -\sin \phi \cos \phi)\| = \sin \phi$$

Substituindo na expressão da área de S teremos,

$$\text{vol}_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \pi$$

(b) Da equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ obtemos a normal unitária a S

$$\nu(x, y, z) = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\|(2x, 2y, 2z)\|} = (x, y, z)$$

e, portanto

$$F \cdot \nu = (-y, x, z) \cdot (x, y, z) = z^2$$

Assim o fluxo de F através de S segundo a normal ν é dado pelo integral

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S z^2$$

que pode ser calculado usando uma das parametrizações da alínea anterior.

Usando a parametrização g obtemos

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S z^2 = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 z^2 \, dz \, d\theta = \frac{7\pi}{12}$$

Usando a parametrização h o fluxo é dado por

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S z^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \cos^2 \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \frac{7\pi}{12}$$