Análise Matemática III

2º semestre de 2002/2003

Exercício Teste 1 (a entregar na semana de 10/3/2003)

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -1 + 3\sqrt{x^2 + y^2} < z < 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \ z > 0\}.$$

   a) Esboce o conjunto V.

   b) Descreva detalhadamente os cortes em V perpendiculares ao eixo Oz.

   c) Descreva detalhadamente os cortes em V perpendiculares ao eixo Oy.

2. Considere o conjunto

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z < 3; \ 0 < x < 2; \ y > 0; \ z > 0\}.$$

   a) Esboce o conjunto W.

   b) Descreva detalhadamente os cortes em W perpendiculares ao eixo Oz.

   c) Descreva detalhadamente os cortes em W perpendiculares ao eixo Ox.

3. Mostre que o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = n^2(x^2 + y^2); \ z < 1; \ n \in \mathbb{N}\}$$

   tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

1. Tendo em conta que nas inequações de definição se encontra o factor $\sqrt{x^2 + y^2}$, que representa a distância de um ponto (x, y, z) ao eixo Oz, o conjunto V será um sólido de revolução em torno do eixo Oz.

   a) O conjunto V é limitado pelos cones descritos pelas equações

$$z = -1 + 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

   e

$$z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

   e pelo plano definido pela equação $z = 0$.
   Destas equações conclui-se que os cones se intersectam segundo o círculo definido por

$$z = 2 \ ; \ \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

   No plano $z = 0$, temos o círculo definido por

$$z = 0 \ ; \ \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{3}$$

   Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e consideremos a região plana definida por

$$R = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 + 3r < z < 4 - 2r; \ z > 0\}$$

   Então, o sólido V obtém-se fazendo rodar em torno do eixo Oz a região plana R tal como se representa na figura 1.

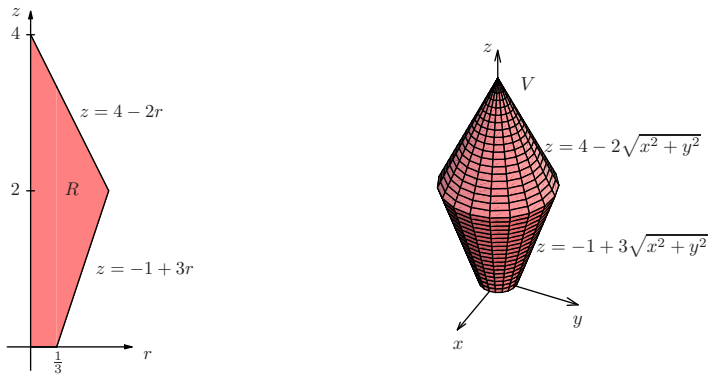

Figura 1: O conjunto V obtém-se rodando a região plana R em torno do eixo Oz

b) Da descrição da alínea anterior é claro que há duas regiões a considerar: uma para $0 < z < 2$ e outra para $2 < z < 4$.
Para $0 < z < 2$, obtemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{3}(z + 1)$$

e, portanto, o corte correspondente é um círculo centrado na origem e de raio $\frac{1}{3}(z+1)$.
Para $2 < z < 4$, obtemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}(4 - z)$$

ou seja, o corte correspondente é também um círculo centrado na origem e de raio $\frac{1}{2}(4 - z)$.

c) Fazendo $x = 0$, das inequações de definição de V obtemos

$$3|y| - 1 < z < 4 - 2|y|$$

Portanto, sabendo que $z > 0$, devemos considerar dois casos: um para $|y| < \frac{1}{3}$ e outro para $\frac{1}{3} < |y|$.
Quando $|y| < \frac{1}{3}$, o corte correspondente será dado por

$$3\sqrt{x^2 + y^2} - 1 < z < 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ z > 0$$

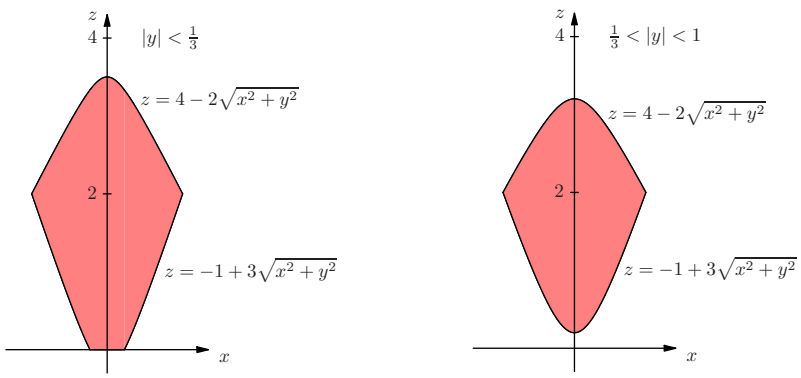

Figura 2: Cortes em V perpendiculares a Oy

Quando $\frac{1}{3} < |y|$, o corte será dado por

$$3\sqrt{x^2+y^2} - 1 < z < 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$$

Estes cortes encontram-se representados na figura 2.

2. a) O conjunto W é um tronco de pirâmide que se representa na figura 3.

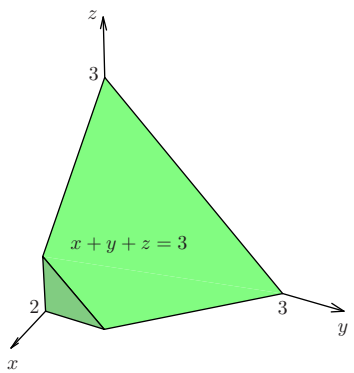

Figura 3: O conjunto W

b) Note-se que para $x = 2$, obtemos $y+z < 1$ e, portanto $0 < z < 1$. Dado que $x+y+z < 3$, é claro que $0 < z < 3$. Portanto, devemos considerar dois casos: um para $0 < z < 1$ e outro para $1 < z < 3$.
Para $0 < z < 1$, note-se que $3 - z > 2$ e, portanto, o corte é definido por

$$x + y < 3 - z \ ; \ y > 0 \ ; \ 0 < x < 2$$

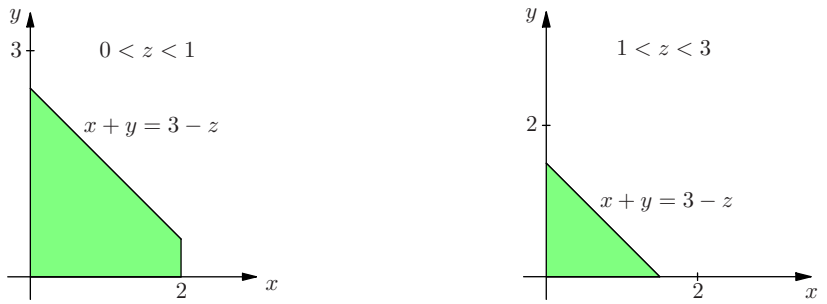

Figura 4: Cortes em W perpendiculares a Oz

Para $1 < z < 3$ o corte correspondente é o triângulo definido por

$$x + y < 3 - z \ ; \ y > 0 \ ; \ x > 0$$

Estes cortes encontram-se representados na figura 4.

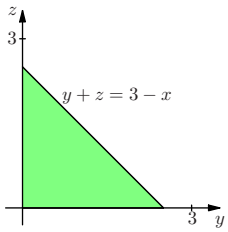

Figura 5: Corte em W perpendicular a Ox

c) Fixando $0 < x < 2$, o corte correspondente será o triângulo definido por

$$y + z < 3 - x \ ; \ y > 0 \ ; \ z > 0$$

e encontra-se representado na figura 5.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$S_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = n^2(x^2 + y^2) \ ; \ z < 1\}$$

Então, o conjunto S pode ser descrito como a união numerável dos conjuntos S_n

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

Seja

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\}$$

e consideremos a função contínua $f_n : D_n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x, y) = n^2(x^2 + y^2)$$

Assim, cada conjunto S_n é o gráfico da função f_n e, portanto, é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^3$. Sendo S a união numerável de conjuntos de medida nula, concluimos que S também é um conjunto de medida nula.