Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 9 (a entregar na semana de 09/05/2005)

1. Considere o conjunto
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + e^{x+zy^2} = 1\}.$$
   a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.
   b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(0,0,0)$.
2. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos do conjunto descrito pela equação $x = y^2$ que se encontram mais próximos do ponto $(1,0)$.

Resolução:

1. a) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x,y,z) = z + e^{x+zy^2} - 1$. É claro que F é de classe C^1. Para além disso,
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}.$$
A matriz Jacobiana
$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x+zy^2} & 2yze^{x+zy^2} & 1 + y^2e^{x+zy^2} \end{bmatrix}$$
tem característica igual a um porque $e^{x+zy^2} > 0,\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Portanto, M é uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.

   b) Dado que o vector $DF(0,0,0) = (1,0,1)$ gera o espaço normal a M no ponto $(0,0,0)$, o correspondente espaço tangente será dado por
$$\begin{aligned} T_{(0,0,0)}M &= \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : (u,v,w) \cdot (1,0,1) = 0\} \\ &= \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u + w = 0\} \\ &= \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u = -w\} \\ &= \{(-w,v,w)\,,\ (v,w) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$
ou seja, será o espaço gerado pelo conjunto de vectores
$$\{(-1,0,1), (0,1,0)\}.$$

2. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função de classe C^1 definida por $F(x,y) = x - y^2$. Dado que a matriz Jacobiana
$$DF(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2y \end{bmatrix}$$
tem característica igual a um, o conjunto definido pela equação $x = y^2$ é uma variedade de dimensão um em $\mathbb{R}^2$ que passará a ser designada por L.

   Assim, deveremos determinar os pontos de L que minimizam a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, definida por $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$. Note-se que f é o quadrado da distância ao ponto $(1,0)$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, deveremos resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda F) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda F) = 0 \\ F = 0\,, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2(x-1) - 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 1 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ x = y^2\,. \end{cases}$$

Da segunda equação teremos $y = 0$ ou $\lambda = -1$. Fazendo $y = 0$, da terceira equação obtemos $x = 0$. Por outro lado, se $\lambda = -1$, da primeira equação vem $x = \frac{1}{2}$ e, da terceira, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, os pontos de estacionaridade da função $f + \lambda F$ são: $(0,0), (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Sendo $f(0,0) = 1$ e $f(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{4}$, concluimos que os pontos $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ são os que se encontram mais próximos de $(1,0)$.