Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 7 (a entregar na aula prática da semana de 25 de Abril de 2005)

Considere o campo vectorial $J(x,y) = (-y,x)$. Use o teorema de Green para calcular a área da região

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; -x\sqrt{1-x} \leq y \leq x\sqrt{1-x}\}.$$

Sugestão: Note que a intersecção do bordo $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(1-x); 0 \leq x\}$ e a recta $y = t \cdot x$ fornece uma parametrização do bordo $\partial\Omega$ dada por $\alpha(t) = (1-t^2) \cdot (1,t)$.

Resolução:

Com a parametrização $\alpha(t) = (1-t^2)(1,t)$, em que $-1 \leq t \leq 1$, o bordo $\partial\Omega$ é percorrido no sentido positivo. Sejam $P(x,y) = -y$ e $Q(x,y) = x$. Então $J(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ e $\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$. Aplicando o teorema de Green e usando a parametrização $\big(x(t), y(t)\big) = (1-t^2)(1,t)$ obtém-se que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 1\,dA &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' x(t)^2\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t)'\,x(t)^2\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^2\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 - 2t^2 + t^4\,dt \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Portanto a área de Ω é $\frac{8}{15}$.