

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 5 (a entregar na semana de 11/04/2005)

Considere o fio de um material de densidade $\sigma(x, y, z) = x$ e com a configuração da linha

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; y = z; x \geq 0\}.$$

1. Calcule a massa do fio.
2. Calcule o momento de inércia do fio relativo ao eixo Ox .

Resolução:

1. Da definição de Γ obtemos

$$x^2 + 2y^2 = 1; y = z; x \geq 0,$$

ou seja, trata-se de uma linha cuja projecção sobre o plano xOy é a elipse descrita pela equação $x^2 + 2y^2 = 1$ e em que $x \geq 0$.

Portanto, usando coordenadas polares adaptadas à elipse, um caminho, de classe C^1 , que descreve a linha Γ pode ser a função $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$g(t) = (\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t).$$

A massa M do fio será dada pelo integral

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma(g(t)) \|g'(t)\| dt.$$

Sendo

$$\|g'(t)\| = \left\| \left(-\sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right) \right\| = \sqrt{\sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t} = 1,$$

teremos

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2.$$

2. Por definição o momento de inércia do fio relativo ao eixo Ox será dado pelo integral

$$I_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma(g(t)) d_x^2(g(t)) \|g'(t)\| dt,$$

em que $d_x(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$ é a distância do ponto (x, y, z) ao eixo Ox .

Tal como na alínea anterior teremos

$$I_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t dt = \frac{2}{3}.$$