Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 13 (a entregar na semana de 06/06/2005)

Considere a superfície não limitada

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = e^{-z} \,;\, z > 0\}$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = (-y, x, e^{-z}).$$

Use o teorema da divergência para mostrar que o fluxo do campo F através de S, segundo o sentido da normal com terceira componente positiva, existe e determine o respectivo valor.

Resolução:

Da definição de S, obtemos

$$F \cdot \nu = \left(-y, x, e^{-z}\right) \cdot \frac{(2x, 2y, e^{-z})}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + e^{-2z}}} = \frac{e^{-2z}}{\sqrt{4e^{-z} + e^{-2z}}}$$

e, sendo $z > 0$, para calcular o fluxo $\int_S F \cdot \nu$ consideremos a sucessão de integrais

$$\left(\int_{S_k} F \cdot \nu \right)$$

em que

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = e^{-z} \,;\, 0 < z < k\}.$$

Dado que cada S_k é uma superfície limitada, podemos aplicar o teorema da divergência ao domínio regular

$$V_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < e^{-z} \,;\, 0 < z < k\}.$$

Note-se que a fronteira de V_k é a união das superfícies S_k , T_0 e T_k, em que

$$\begin{aligned} T_0 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \,;\, z = 0\} \\ T_k &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < e^{-k} \,;\, z = k\}. \end{aligned}$$

Assim, teremos

$$\int_{S_k} F \cdot \nu = \int_{V_k} \mathrm{div} F - \int_{T_0} F \cdot \nu_0 - \int_{T_k} F \cdot \nu_k$$

em que

$$\nu_0 = (0, 0, -1) \,; \quad \nu_k = (0, 0, 1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{S_k} F \cdot \nu &= -\int_{V_k} e^{-z} + \text{área}(T_0) - e^{-k}\text{área}(T_k) \\ &= \frac{\pi}{2}(e^{-2k} - 1) + \pi - \pi e^{-2k} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{k \to \infty} \int_{S_k} F \cdot \nu = \frac{\pi}{2}.$$

Dado que $F \cdot \nu > 0$, pelo teorema da convergência monótona, temos

$$\int_S F \cdot \nu = \lim_{k \to \infty} \int_{S_k} F \cdot \nu = \frac{\pi}{2}.$$